



WI: 230825

**een model van de licht-
verstrooiing in de atmos-
feer voor de correctie van
remote sensing satelliet-
opnamen**

meetkundige dienst

MDR 153 MD

MEETKUNDIGE DIENST : MDLK-R-8544

TITEL : Een model van de lichtverstrooiing in de
atmosfeer voor de correctie van remote
sensing satellietopnamen

AUTEUR : ir. L.M.M. Veugen

DATUM : Oktober 1985

SAMENVATTING : Remote sensing waarnemingen worden gestoord
door lichtverstrooiing en absorptie in de
atmosfeer. Een eenvoudig model van de licht-
verstrooiing wordt gepresenteerd. Hieruit
resulteren een aantal parameters waarmee
satellietopnamen gecorrigeerd kunnen worden

1. Inleiding

Remote sensing waarnemingen in het zichtbare en nabij infrarode venster worden voor een groot gedeelte gestoord door signaalbijdragen die niet van het geobserveerde object afkomstig zijn. De oorzaak hiervan ligt bij deeltjes in de atmosfeer die het licht naar alle richtingen verstrooien. Aan de andere kant wordt het licht gedeeltelijk gereduceerd als gevolg van absorptie door atmosferische deeltjes. Het licht dat op een remote sensor valt moet voor beide invloeden gecorrigeerd worden. Het uitvoeren van een correctie is noodzakelijk voor een gedegen bewerking en interpretatie van remote sensing opnamen.

Dit rapport beschrijft een eenvoudig model van de lichtverstrooiing in de atmosfeer, dat een uitbreiding is van een zogenaamd "approximate model" uit Sobolev(1975). De uit het model voortvloeiende resultaten maken het mogelijk satellietopnamen te corrigeren. Deze situatie is eenvoudiger dan in het geval van vliegtuigopnamen, omdat (in de meeste gevallen) een satelliet sensor (bijna) loodrecht naar beneden kijkt. De kijkrichting hangt daarom niet af van de azimuth-hoek van de zon.

Als invoer voor het model dient onder andere de phase function. Deze functie geeft aan in welke richting een lichtstraal, die op een deeltje stuit, statistisch gezien verstrooid wordt. De phase function wordt volgens de Mie theorie (b.v. Van de Hulst (1957)) berekend uit de deeltjesgrootteverdeling. Optische diktes, gemeten met een Guzzi-spectroradiometer (Guzzi, e.a. (1985)) in een aantal golflengtebanden, worden via een lineaire inversie-methode vertaald naar een deeltjesgrootteverdeling ten tijde van de overkomst van de satelliet. De meeste grootheden hangen af van de gebruikte golflengte. Eenvoudigheidshalve laten we deze aanduiding achterwege.

Het rapport dient tevens als documentatie bij de ontwikkelde programmatuur.

2. Geometrie

In figuur 1 staan de relevante (zenith) hoeken. Deze hoeken zijn gedefiniëerd tussen 0 en π . Het gevolg is dat in sommige gevallen een aanwijzing omtrent de azimuth-hoek ϕ nodig is. Er wordt onderscheid gemaakt tussen het halfvlak ($\phi=0$) waarin de zon ligt, en het complementaire halfvlak ($\phi=\pi$).

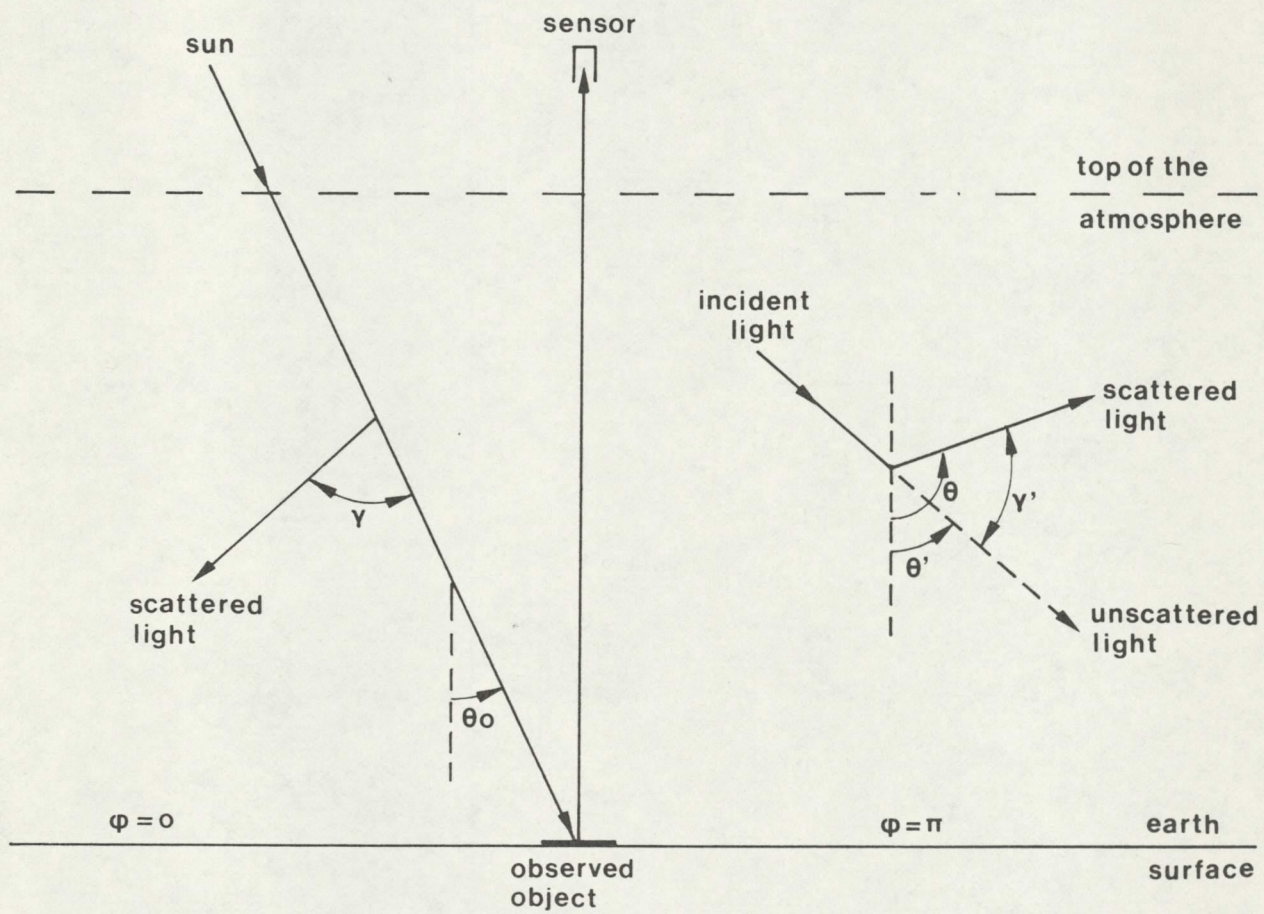
De omschrijving van de hoeken is als volgt:

- θ_0 : zenith-hoek direct invallend zonlicht
- θ : zenith-hoek lichtstraal na verstrooiing
- θ' : zenith-hoek invallende lichtstraal
- γ : hoek tussen direct invallend zonlicht en verstrooid licht
- γ' : hoek tussen invallende lichtstraal en verstrooid licht.

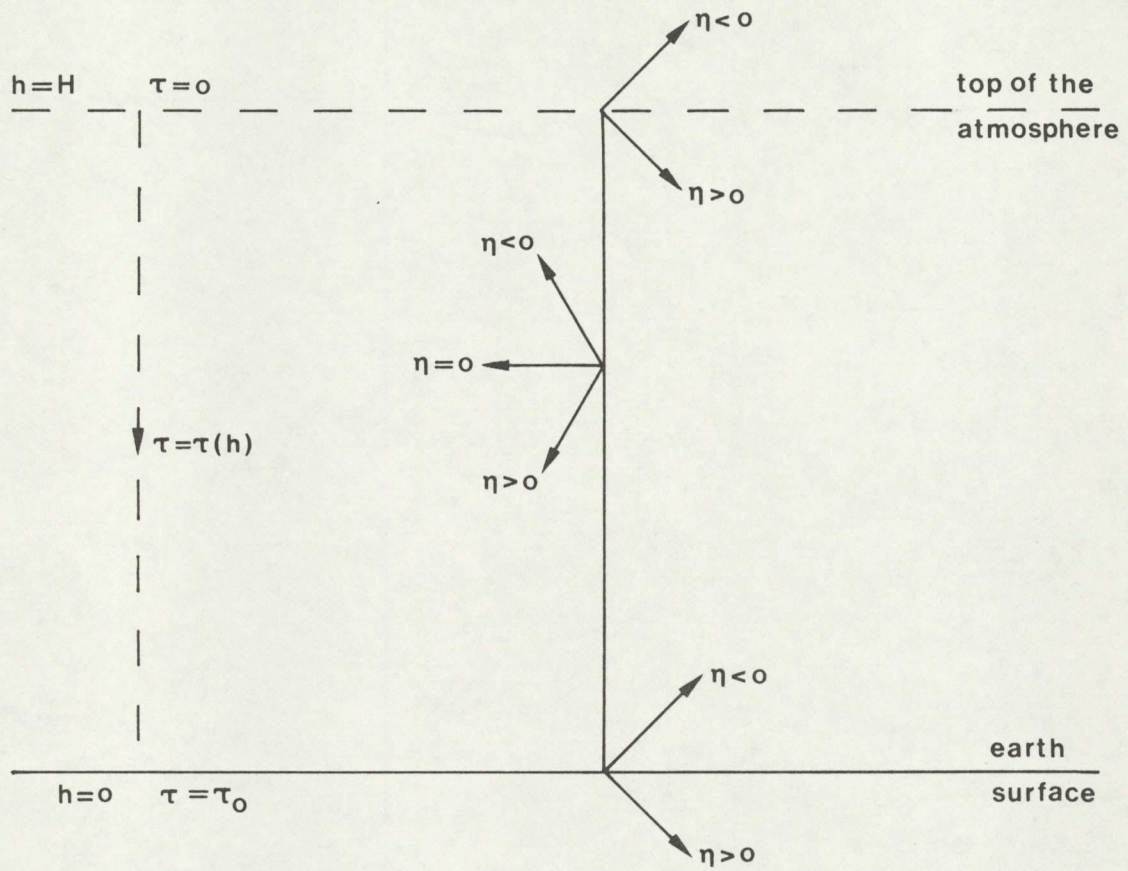
Een zenith-hoek wordt gerelateerd aan de neerwaarts gerichte verticaal. De cosinus van een zenith-hoek is dus positief in neerwaartse richting (zie figuur 2). De volgende notatie wordt gebruikt:

$$\begin{array}{ll} \zeta = \cos(\theta_0) & \bar{\zeta} = \sin(\theta_0) \\ \eta = \cos(\theta) & \bar{\eta} = \sin(\theta) \\ \eta' = \cos(\theta') & \bar{\eta}' = \sin(\theta') \end{array}$$

De optische dikte $\tau = \tau(h)$ met h de hoogte t.o.v. het aardoppervlak is ook in figuur 2 aangegeven. De optische dikte is een cumulatieve maat voor de extinctie in de atmosferische laag. Aan de top van de atmosfeer geldt $\tau(h=H)=0$, terwijl aan het aardoppervlak de optische dikte maximaal is: $\tau(h=0) = \tau_0$.



Figuur 1. Geometrie van sun, object, sensor.
Geometrie van (zenith) hoeken.



Figuur 2. Teken van $\eta = \cos(\theta)$.
Optische dikte τ .

3. Phase function

De phase function is te beschouwen als een (kans)dichtheidsfunctie, die per richting de kans aangeeft, dat in die richting een lichtstraal, na het treffen van een deeltje, verstrooid wordt. Een andere interpretatie is, dat de phase function de sterkte (genormaliseerd) van een verstrooide lichtstraal aangeeft in elke richting. Een richting wordt vastgelegd met 2 hoeken, namelijk een zenith-hoek tussen 0 en π , en een azimuth-hoek tussen 0 en 2π . De richting van zenith-hoek 0 (met willekeurige azimuth-hoek) komt overeen met de voorwaartse richting, waarin de invallende lichtstraal zich voortbeweegt.

In het model wordt aangenomen dat de atmosfeer alleen bolvormige deeltjes bevat. Dankzij deze aanname worden de berekeningen aanzienlijk vereenvoudigd. Immers, de phase function is dan symmetrisch t.o.v. de voorwaartse richting en dus azimuth-onafhankelijk.

De phase function $\chi(\cdot)$ is als volgt genormaliseerd:

$$(3.1) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} \chi(\theta) \, d\omega = 1$$

Vanwege de azimuth-onafhankelijkheid geldt:

$$(3.2) \quad \frac{1}{2} \int_0^\pi \chi(\theta) \sin(\theta) \, d\theta = 1$$

Voor de berekeningen is het gemakkelijk om de phase function in een Legendre-reeks te ontwikkelen:

$$(3.3) \quad \chi(\theta) = \sum_{i=0}^n x_i \cdot p_i(\cos\theta)$$

De reeks is na een eindig aantal termen (n) afgekapt. Voor een verhandeling over Legendre-polynomen wordt verwezen naar Kuipers, Timman (1966).

Gebruik makend van de orthogonaliteits-eigenschap van de polynomen geldt:

$$(3.4) \quad x_i = (2i+1) \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \chi(\theta) \cdot p_i(\cos\theta) \, d\cos\theta$$

Voor de nul-de term geldt dus $x_0=1$ vanwege de normalisatie (formule (3.2)).

In de gehanteerde benadering wordt de phase function na $n=2$ termen afgekapt. Hiermee is het mogelijk om de Rayleigh-verstrooiing nog exact te modelleren. De relevante Legendre-polynomen zijn:

$$(3.5) \quad \begin{cases} P_0(z) = 1 \\ P_1(z) = z \\ P_2(z) = \frac{1}{2} \cdot (3z^2 - 1) \end{cases}$$

De richting van een invallende lichtstraal wordt aangegeven met de hoeken (θ', ϕ') ; die van een verstrooide lichtstraal met (θ, ϕ) . De hoek γ' tussen beide volgt uit de formule

$$(3.6) \quad \cos \gamma' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

Het algemene geval met azimuth-afhankelijkheid wordt behandeld, omdat dit voor correctie van vliegtuig remote sensing opnamen van belang zal zijn. De bedoeling is om $\chi(\gamma')$ te ontwikkelen in een cosinus-reeks, afhankelijk van het azimuth-verschil $\phi - \phi'$, en met coëfficiënten die een functie zijn van η en η' . Definieer

$$(3.7) \quad \chi(\gamma') = P^0(\eta, \eta') + 2 \sum_{m=1}^n P^m(\eta, \eta') \cos(m(\phi - \phi'))$$

De coëfficiënt-functies zijn als volgt te ontbinden, zie Sobolev(1975):

$$(3.8) \quad P^m(\eta, \eta') = \sum_{i=m}^n c_i^m \cdot P_i^m(\eta) \cdot P_i^m(\eta')$$

$$(3.9) \quad c_i^m = x_i \cdot \frac{(i-m)!}{(i+m)!}$$

De functies $P_i^m(\cdot)$ heten geassocieerde Legendre-polynomen. De relatie met Legendre-polynomen is als volgt:

$$(3.10) \quad P_i(\cos \gamma') = P_i(\eta) \cdot P_i(\eta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(i-m)!}{(i+m)!} P_i^m(\eta) \cdot P_i^m(\eta') \cdot \cos(m(\phi - \phi'))$$

Enkele eigenschappen van $P_i^m(\cdot)$ zijn:

$$(3.11) \quad \begin{cases} P_i^0(\eta) = p_i(\eta) \\ P_1^1(\eta) = \bar{\eta} \\ P_2^1(\eta) = 3\eta\bar{\eta} \\ P_2^2(\eta) = 3\bar{\eta}^2 = 3(1-\eta^2) \\ P_i^m(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

De coëfficiënt-functies zijn als volgt uit te schrijven ($n=2$):

$$(3.12) \quad P^0(\eta, \eta') = c_0^0 P_0^0(\eta) P_0^0(\eta') + c_1^0 P_1^0(\eta) P_1^0(\eta') + c_2^0 P_2^0(\eta) P_2^0(\eta') \\ = x_0 + x_1 \cdot \eta \cdot \eta' + x_2 \cdot \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1) \cdot \frac{1}{2}(3(\eta')^2 - 1)$$

$$(3.13) \quad P^1(\eta, \eta') = c_1^1 P_1^1(\eta) P_1^1(\eta') + c_2^1 P_2^1(\eta) P_2^1(\eta') \\ = x_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \bar{\eta} \cdot \bar{\eta}' + x_2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3\eta\bar{\eta} \cdot 3\eta'\bar{\eta}'$$

$$(3.14) \quad P^2(\eta, \eta') = c_2^2 P_2^2(\eta) P_2^2(\eta') \\ = x_2 \cdot \frac{1}{24} \cdot \bar{\eta}^2 \cdot (\bar{\eta}')^2$$

Coëfficiënt-functies kunnen ook bepaald worden op basis van de phase function i.p.v. de coëfficiënten x_0, x_1, \dots, x_n . Definieer de functies $\bar{P}^m(\cdot, \cdot)$ als volgt (vergelijk formule (3.7)):

$$(3.15) \quad \bar{P}^m(\eta, \eta') := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(\gamma') \cdot \cos(m(\phi - \phi')) d\phi$$

De coëfficiënt-functies $P^m(\cdot, \cdot)$ hebben slechts $n+1$ termen, omdat ze gebaseerd zijn op een afgekapte phase function. Daarentegen komen in de functies $\bar{P}^m(\cdot, \cdot)$ alle (oneindig veel) termen tot uiting. De berekening van deze functies is echter bewerkelijk vanwege de (numerieke) integratie. Voor het bijzondere geval $m=0$ geldt:

$$(3.16) \quad \begin{cases} \bar{P}^0(\eta=1, \eta') = \chi(\eta') \\ \bar{P}^0(\eta=-1, \eta') = \chi(\pi - \eta') \end{cases}$$

Modellering phase function

De phase function die berekend wordt op basis van een deeltjesgrootteverdeling heeft in het algemeen een nauwe voorwaarts gerichte piek. Door het geringe aantal Legendre-polynomen waarin de phase function ontwikkeld wordt komt deze piek niet goed tot uitdrukking. Derhalve wordt in het drie-termen model van de phase function $\chi_m(\cdot)$ een delta-functie bijdrage opgenomen. Het model luidt:

$$(3.17) \quad \chi_m(\theta) = (1 - y_0) \cdot \delta(\theta) + y_0 \cdot \chi_Y(\theta)$$

$$(3.18) \quad y_0 \cdot \chi_Y(\theta) = y_0 + y_1 \cdot p_1(\cos\theta) + y_2 \cdot p_2(\cos\theta)$$

De coëfficiënten y_0 , y_1 , y_2 worden bepaald via lineaire regressie tussen een grenshoek θ_g en π . Achteraf wordt gecontroleerd of de coëfficiënten aanleiding geven tot een fysisch interpreteerbare phase function. Immers, de functie $\chi_m(\cdot)$ moet voor alle hoeken θ niet-negatief blijven. Dit komt neer op de volgende restricties:

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y_0 \leq 1 \\ y_0 + y_1 + y_2 \geq 0 \\ y_0 - y_1 + y_2 \geq 0 \\ \text{als } |y_1| < 3 \cdot |y_2|, \text{ dan } y_1^2 + 3 \cdot (y_2 - y_0)^2 \leq 3 \cdot y_0^2 \end{array} \right.$$

4. Atmosferisch model

De verstrooiing van het licht in de atmosfeer wordt beschreven met de volgende differentiaalvergelijking:

$$(4.1) \quad \eta \frac{d}{d\tau} I = -\alpha I + B$$

met

$$\begin{aligned} I &= I(\tau, \eta, \phi) & : & \text{radiantie} \\ B &= B(\tau, \eta, \phi) & : & \text{bronterm} \end{aligned}$$

De constante α is normaal gelijk aan 1, maar wijkt hiervan af bij toepassing van een delta-functie in de phase function. De atmosferische laag wordt verondersteld planparallel te zijn. De hoogte-afhankelijkheid van I en B komt tot uitdrukking in de cumulatieve optische dikte τ .

Voorts wordt aangenomen dat de atmosfeer een homogene samenstelling heeft, en er dus sprake is van één phase function.

De oplossing van (4.1) is eenvoudig:

$$(4.2) \quad I = I_r \cdot e^{-\alpha(\tau-\tau_r)/\eta} + \int_{\tau_r}^{\tau} B(t, \eta, \phi) \cdot \frac{e^{-\alpha(\tau-t)/\eta}}{\eta} dt$$

met

$$\begin{aligned} I_r &= I(\tau_r, \eta, \phi) \\ \tau_r &: \text{referentie } \tau \end{aligned}$$

Voor τ_r komen in aanmerking $\tau_r = 0$ (top atmosphere) en $\tau_r = \tau_0$ (earth surface). Uit de randvoorwaarden volgt dan I_r .

Het probleem is echter dan de bronterm B weer een functie is van I . De bronterm bestaat uit twee delen. Een deel D is afkomstig van de diffuse instraling, het andere deel van de directe zonnestraling.

$$(4.3) \quad D = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(\tau, \eta', \phi') \cdot \chi_m(\gamma') d\eta' d\phi'$$

$$(4.4) \quad Z = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \pi S \cdot \chi(\gamma) \cdot e^{-\tau/\zeta}$$

met

$$\begin{aligned} \Gamma &: \text{single-scattering albedo} \\ S &: \text{extraterrestrial solarradiation} \end{aligned}$$

Voor het vervolg wordt de volgende functie gedefinieerd:

$$(4.5) \quad T(\tau) := \frac{1}{4} \cdot S \cdot e^{-\tau/\zeta}$$

zodat

$$(4.6) \quad Z(\tau) = \Gamma \cdot \chi(\gamma) \cdot T(\tau)$$

De integraal uit (4.2) is over het gedeelte Z van B analytisch te berekenen:

$$(4.7) \quad \int_{\tau_r}^{\tau} Z(t) \cdot \frac{e^{-\alpha(\tau-t)/\eta}}{\eta} dt = Z(\tau) \cdot \psi(\alpha, \tau - \tau_r, \eta, \zeta)$$

met

$$(4.8) \quad \psi = \begin{cases} \zeta \cdot \frac{1 - \exp\{-(\tau - \tau_r) \cdot (\alpha/\eta - 1/\zeta)\}}{\alpha \cdot \zeta - \eta} & \eta \neq \alpha \cdot \zeta, \eta \neq 0 \\ \frac{\tau - \tau_r}{\eta} & \eta = \alpha \cdot \zeta \\ \frac{1}{\alpha} & \eta = 0 \end{cases}$$

Door de bijdrage D in B op nul te stellen is voor willekeurige phase function de exacte, zogenaamde single scattering oplossing van de radiantie-vergelijking te bepalen. Het oplossen van de radiantie-vergelijking waarbij de diffuse bronterm in rekening wordt gebracht en de originele phase function wordt gehanteerd is weliswaar mogelijk, maar vereist een complexe mathematische analyse, zie Van de Hulst(1957), Chandrasekhar (1960), Sobolev(1975). Daarom zullen we uitgaande van de in hoofdstuk 3 gemodelleerde phase function een benaderde oplossing van de radiantie-vergelijking bepalen.

Het bepalen van de diffuse bronterm D verloopt in een aantal fasen. Na integratie over de azimuth-hoek en de zenith-hoek is de term alleen nog maar hoogte (τ) afhankelijk. De oplossing zal dan bestaan uit een lineaire combinatie van exponentiële functies, die vergelijkbaar aan (4.7) behandeld kunnen worden. Via de originele differentiaalvergelijkingen, uitgesplitst naar de termen van een cosinusreeks van de azimuth-hoek, wordt de hoekafhankelijkheid (η) weer in D betrokken.

Ontwikkel I in een cosinus-reeks:

$$(4.9) \quad I(\tau, \eta, \phi) = I_0(\tau, \eta) + 2 \cdot I_1(\tau, \eta) \cdot \cos \phi + 2 \cdot I_2(\tau, \eta) \cdot \cos 2\phi$$

De termen lopen tot en met $n = 2$ omdat ook de phase function na term 2 ophoudt. De azimuth-hoek ϕ is gerelateerd aan de azimuth van de zon. De diffuse bronterm is nu te herleiden:

$$(4.10) \quad D = \Gamma \cdot (1 - y_0) \cdot I(\tau, \eta) + \Gamma \cdot y_0 \cdot \{ D_0(\tau, \eta) + 2 \cdot D_1(\tau, \eta) \cdot \cos \phi + 2 \cdot D_2(\tau, \eta) \cdot \cos 2\phi \}$$

met

$$(4.11) \quad D_m(\tau, \eta) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 I_m(\tau, \eta') \cdot P_Y^m(\eta, \eta') d\eta' \quad m = 0, 1, 2$$

De functies P_Y^m zijn analoog aan de coëfficiënt-functies in (3.8), maar nu gebaseerd op $x_m = y_m/y_0$. Uit de opbouw van de functies P_Y^m en de laatste eigenschap van (3.11) is nu reeds aangetoond dat $D_m(\tau, \eta = -1) = 0$, zodat de hogere orde termen van de cosinus-reeks van D geen bijdrage zullen geven aan de path-radiance bij satelliet remote sensing. Voor de irradiance spelen deze termen geen rol, omdat de integraal over de azimuth-hoek exact nul is. Om deze redenen concentreren we ons op de nul-de termen I_0 en D_0 .

Het voor ons op dit moment relevante deel D van de diffuse bronterm D bedraagt dus

$$(4.12) \quad D'(\tau, \eta) = \Gamma \cdot (1 - y_0) \cdot I_0(\tau, \eta) + \Gamma \cdot y_0 \cdot D_0(\tau, \eta)$$

met (overeenkomstig (4.11)) :

$$(4.13) \quad y_0 \cdot D_0(\tau, \eta) = y_0 \cdot \bar{I}_0(\tau) \cdot p_0(\eta) + y_1 \cdot \bar{H}_0(\tau) \cdot p_1(\eta) + y_2 \cdot \bar{K}_0(\tau) \cdot p_2(\eta)$$

$$(4.14) \quad \bar{I}_0(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 I_0(\tau, \eta) \cdot p_0(\eta) d\eta$$

$$(4.15) \quad \bar{H}_0(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 I_0(\tau, \eta) \cdot p_1(\eta) d\eta$$

$$(4.16) \quad \bar{K}_0(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 I_0(\tau, \eta) \cdot p_2(\eta) d\eta$$

De radiantie-vergelijking voor de nul-de orde wordt dus:

$$(4.17) \quad \eta \cdot \frac{d}{d\tau} I_0 = -I_0 + D' + \Gamma \cdot P^0(\eta, \zeta) \cdot T(\tau) \\ = -\alpha \cdot I_0 + \Gamma \cdot y_0 \cdot D_0(\tau, \eta) + \Gamma \cdot P^0(\eta, \zeta) \cdot T(\tau)$$

met

$$(4.18) \quad \alpha = 1 - \Gamma \cdot (1 - y_0)$$

Uit (4.17) worden 2 differentiaalvergelijkingen afgeleid door integratie over η na vermenigvuldiging met $p_0(\eta)$ resp. $p_1(\eta)$.

$$(4.19) \quad \frac{d}{d\tau} \bar{H}_O = - (1 - \Gamma) \cdot \bar{I}_O + \Gamma \cdot T(\tau)$$

$$(4.20) \quad \frac{2}{3} \frac{d}{d\tau} \bar{K}_O + \frac{1}{3} \frac{d}{d\tau} \bar{I}_O = -v_O \cdot \bar{H}_O + w_O \cdot T(\tau) \cdot \zeta$$

met

$$(4.21) \quad v_O = \alpha - \Gamma \cdot y_1/3 \quad w_O = \Gamma \cdot x_1/3$$

Maak nu de volgende aanname

$$(4.22) \quad 2 \cdot \bar{K}_O(\tau) + \bar{I}_O(\tau) = P_1 \cdot \bar{I}_O(\tau)$$

waarbij P_1 een te kiezen constante is (in de buurt van één). Er resteert dan een stelsel van 2 differentiaalvergelijkingen, dat analytisch oplosbaar is.

$$(4.23) \quad \bar{I}_O(\tau) = P_3 \cdot e^{-k\tau} + P_4 \cdot e^{k\tau} - P_5 \cdot T(\tau) \cdot \zeta$$

$$(4.24) \quad \bar{H}_O(\tau) = P_6 \cdot \{ P_3 \cdot e^{-k\tau} - P_4 \cdot e^{k\tau} \} - P_7 \cdot T(\tau) \cdot \zeta$$

met

$$(4.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} k^2 = v_O \cdot (1 - \Gamma) / (P_1/3) \\ P_2 = (v_O \cdot \Gamma + w_O) / (P_1/3) \\ P_5(\zeta) = P_2 \cdot \zeta / (1 - k^2 \zeta^2) \\ P_6 = k \cdot (P_1/3) / v_O = (1 - \Gamma) / k \\ P_7(\zeta) = (\Gamma + w_O / v_O) / (1 - k^2 \zeta^2) - w_O / v_O \end{array} \right.$$

De functies $\bar{I}_O(\tau)$, $\bar{H}_O(\tau)$ en $\bar{K}_O(\tau)$ zijn de gezochte termen die deel uitmaken van de diffuse bronterm D' , zie (4.13). Alleen de constanten P_3 en P_4 dienen nog bepaald te worden uit de randvoorwaarden. Uit (5.2) en (5.4) volgen de vergelijkingen:

$$(4.26) \quad P_3 \cdot (E_1 + 2 P_6) + P_4 \cdot (E_1 - 2 P_6) = T(0) \cdot \zeta \cdot (E_1 P_5 + 2 P_7)$$

$$(4.27) \quad P_3 \cdot (E_2 - 2 P_6) \cdot e^{-k\tau_0} + P_4 \cdot (E_2 + 2 P_6) \cdot e^{k\tau_0} = T(\tau_0) \cdot \zeta \cdot (E_2 P_5 - 2 P_7)$$

waaruit P_3 en P_4 zijn op te lossen.

$$(4.28) \quad P_3 = T(0) \cdot \zeta \cdot \{ (E_1 P_5 + 2P_7) \cdot (E_2 + 2P_6) \cdot e^{k\tau_0} - (E_2 P_5 - 2P_7) \cdot (E_1 - 2P_6) \cdot e^{-\tau_0/\zeta} \} / N$$

$$(4.29) \quad P_4 = T(0) \cdot \zeta \cdot \{ (E_2 P_5 - 2P_7) \cdot (E_1 + 2P_6) \cdot e^{-\tau_0/\zeta} - (E_1 P_5 + 2P_7) \cdot (E_2 - 2P_6) \cdot e^{-k\tau_0} \} / N$$

$$(4.30) \quad N = (E_1 + 2P_6) \cdot (E_2 + 2P_6) \cdot e^{k\tau_0} - (E_1 - 2P_6) \cdot (E_2 - 2P_6) \cdot e^{-k\tau_0}$$

Merk op dat P_3 en P_4 functies van ζ zijn; N hangt niet van ζ af.

Beschouw nu D_0 als een lineaire combinatie van exponentiële functies voor het uitvoeren van de integratie, vergelijk (4.7).

$$(4.31) \quad Y_0 \cdot D_0(\tau, \eta) = u_0(\eta, \zeta) \cdot e^{-k\tau} + u_1(\eta, \zeta) \cdot e^{k\tau} - u_2(\eta, \zeta) \cdot e^{-\tau/\zeta}$$

met

$$(4.32) \quad \begin{cases} u_0(\eta, \zeta) = (u_{\infty}(\eta) + y_1 \cdot p_1(\eta) \cdot P_6) \cdot P_3(\zeta) \\ u_1(\eta, \zeta) = (u_{\infty}(\eta) - y_1 \cdot p_1(\eta) \cdot P_6) \cdot P_4(\zeta) \\ u_2(\eta, \zeta) = (u_{\infty}(\eta) \cdot P_5(\zeta) + y_1 \cdot p_1(\eta) \cdot P_7(\zeta)) \cdot T(0) \cdot \zeta \\ u_{\infty}(\eta) = Y_0 \cdot p_0(\eta) + \frac{1}{2} \cdot (P_1 - 1) \cdot y_1 \cdot p_2(\eta) \end{cases}$$

Hiermee is de gewenste vorm van het relevante deel van de bronterm B bepaald, en kan formule (4.2) worden ingevuld.

$$(4.33) \quad I_0(\tau, \eta) = \Gamma \cdot \{ u_0(\eta, \zeta) \cdot e^{-k\tau} \cdot \psi(\alpha, \tau - \tau_r, \eta, 1/k) + \\ u_1(\eta, \zeta) \cdot e^{k\tau} \cdot \psi(\alpha, \tau - \tau_r, \eta, -1/k) + \\ -u_2(\eta, \zeta) \cdot e^{-\tau/\zeta} \cdot \psi(\alpha, \tau - \tau_r, \eta, \zeta) + \\ P^0(\eta, \zeta) \cdot T(\tau) \cdot \psi(\alpha, \tau - \tau_r, \eta, \zeta) \}$$

Hierbij moet worden aangetekend dat

$$(4.34) \quad \begin{cases} \tau_r = 0 & \text{als } \eta > 0 \quad (\text{neerwaartse straling}) \\ \tau_r = \tau_0 & \text{als } \eta < 0 \quad (\text{opwaartse straling}) \end{cases}$$

De referentie-waarde I_r is volgens de randvoorwaarden voor zowel opwaartse als neerwaartse straling nul, zie (5.1), (5.3).

Merk op dat in plaats van $P^0(\eta, \zeta)$ in formule (4.33) de coëfficiënt-functie $\bar{P}^0(\eta, \zeta)$, zie (3.15), gesubstitueerd kan worden. Dit zou ook in overeenstemming zijn met de opmerking over de single-scattering oplossing van het atmosferisch model.

5. Randvoorwaarden, straling aan grensvlakken

Voor het oplossen van de differentiaalvergelijking (4.17) zijn randvoorwaarden noodzakelijk. Deze worden opgelegd aan de beide vlakken (top atmosphere en earth surface), die de atmosferische laag waarbinnen de verstrooiing plaatsvindt, begrenzen.

Top atmosphere

Er vindt geen diffuse instraling vanaf de bovenkant plaats:

$$(5.1) \quad I(\tau=0, \eta, \phi) = 0 \quad \text{voor } \eta > 0$$

Deze voorwaarde moet worden vertaald naar een randvoorwaarde in termen van I_0 en H_0 . Dit gebeurt als volgt:

$$\begin{aligned} (5.2) \quad \bar{H}_0(\tau=0) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I_0(0, \eta) \cdot p_1(\eta) d\eta \\ &= E_1 \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I_0(0, \eta) d\eta \cdot \int_{-1}^0 \eta d\eta \\ &= -\frac{1}{2} E_1 \cdot \bar{I}_0(0) \end{aligned}$$

In deze afleiding is tweemaal van voorwaarde (5.1) gebruik gemaakt. De vrij te kiezen constante E_1 zal in de buurt van één liggen. Bovendien is E_1 achteraf numeriek te verifiëren en kan zonodig bijgesteld worden.

Earth surface

Het aardoppervlak wordt verondersteld perfect te absorberen. De situatie van een reflecterend oppervlak wordt in hoofdstuk 6 behandeld. Er geldt dus:

$$(5.3) \quad I(\tau=\tau_0, \eta, \phi) = 0 \quad \text{voor } \eta < 0$$

Op eenzelfde manier als bovenstaand is af te leiden:

$$(5.4) \quad \bar{H}_0(\tau_0) = \frac{1}{2} E_2 \cdot \bar{I}_0(\tau_0)$$

Op E_2 zijn dezelfde opmerkingen als voor E_1 van toepassing.

Expliciete uitdrukkingen voor stralingsfluxen aan grensvlakken zijn nu aan te geven.

De totale stralingsflux aan de top van de atmosfeer naar boven is:

$$(5.5) \quad E_p = - \int_{4\pi} I(0, \eta, \phi) \cdot \eta \, d\omega$$

$$= -4\pi \cdot \bar{H}_0(0)$$

De atmospheric albedo is de ratio tussen de flux die aan de top van de atmosfeer naar boven verdwijnt, en de binnenkomende flux van de zon:

$$(5.6) \quad A(\zeta, \tau_0) = \frac{E_p}{\pi S \cdot \zeta}$$

Een expliciete vorm waarin de afhankelijkheid van ζ tot uitdrukking komt is als volgt:

$$(5.7) \quad A(\zeta, \tau_0) = P_7(\zeta) - \frac{2 \cdot P_6}{N} \{ (E_1 P_5(\zeta) + 2P_7(\zeta)) \cdot (E_2 c_0 + 2P_6 \cdot s_0) - (E_2 P_5(\zeta) - 2P_7(\zeta)) \cdot E_1 \cdot \exp(-\tau_0/\zeta) \}$$

met

$$(5.8) \quad \begin{cases} c_0 = \cosh(k \cdot \tau_0) \\ s_0 = \sinh(k \cdot \tau_0) \end{cases}$$

De direct solar irradiance aan het aardoppervlak bedraagt:

$$(5.9) \quad E_s(\tau_0) = \pi S \cdot \zeta \cdot e^{-\tau_0/\zeta}$$

De diffuse irradiance E_d is analoog aan E_p gelijk aan

$$(5.10) \quad E_d = 4\pi \cdot \bar{H}_0(\tau_0)$$

De atmospheric transmittance is in analogie naar de atmospheric albedo gelijk aan de flux die de atmosferische laag aan het aardoppervlak verlaat, d.w.z. geabsorbeerd wordt, en de binnenkomende flux:

$$(5.11) \quad V(\zeta, \tau_0) = \frac{E_s + E_d}{\pi S \cdot \zeta} = e^{-\tau_0/\zeta} + \frac{E_d}{\pi S \cdot \zeta}$$

De expliciete vorm is als volgt (vergelijk (5.7)):

$$(5.12) \quad V(\zeta, \tau_0) = (1 - P_7(\zeta)) \cdot e^{-\tau_0/\zeta} + \frac{2 \cdot P_6}{N} \cdot \{ (E_1 P_5(\zeta) + 2P_7(\zeta)) \cdot E_2 - (E_2 P_5(\zeta) - 2P_7(\zeta)) \cdot (E_1 c_0 + 2P_6 s_0) \cdot \exp(-\tau_0/\zeta) \}$$

De spherical albedo is de ratio van flux die door een gehele planeet wordt teruggekaatst en de binnenkomende flux van de zon:

$$(5.13) \quad A_S(\tau_0) = 2 \int_0^1 A(\zeta, \tau_0) \cdot \zeta \, d\zeta$$

Het analogon voor de aan het oppervlak geabsorbeerde (doorgelaten) straling is:

$$(5.14) \quad V_S(\tau_0) = 2 \int_0^1 V(\zeta, \tau_0) \cdot \zeta \, d\zeta$$

6. Reflectie aan het aardoppervlak

Het bovenstaande atmosferisch model is afgeleid onder de randvoorwaarde dat het aardoppervlak alle opvallende straling absorbeert. Het voordeel hiervan is dat de afleiding van het model vereenvoudigd wordt. De bijdragen aan de radianties, die het gevolg zijn van een reflecterend oppervlak, kunnen met een extra term aan de radianties worden toegevoegd.

Deze aanpak maakt het model overzichtelijk.

We veronderstellen dat het aardoppervlak Lambertiaans reflecteert met een (gemiddelde) reflectie-coëfficiënt a . Dit houdt onder meer in dat de reflectie isotroop is, zodat alleen de nul-de term van de bronterm wordt beïnvloed. De radianties zullen worden aangegeven met een bovenindex a . Volgens Sobolev(1975) §4.2. geldt aan de top van de atmosfeer:

$$(6.1) \quad I_O^a(0, -\eta) = I_O(0, -\eta) + a \cdot V(\eta, \tau_0) \cdot W(\zeta, \tau_0, a) \cdot S \zeta \quad , \quad \eta > 0$$

(van teken gewisseld)

en aan het aardoppervlak:

$$(6.2) \quad I_O^a(\tau_0, \eta) = I_O(\tau_0, \eta) + a \cdot A(\eta, \tau_0) \cdot W(\zeta, \tau_0, a) \cdot S \zeta \quad , \quad \eta > 0$$

met

$$(6.3) \quad W(\zeta, \tau_0, a) = \frac{V(\zeta, \tau_0)}{1 - a \cdot A_S(\tau_0)}$$

De overige grootheden zijn als volgt:

$$(6.4) \quad A^a(\zeta, \tau_0) = A(\zeta, \tau_0) + a \cdot V_S(\tau_0) \cdot W(\zeta, \tau_0, a)$$

$$(6.5) \quad V^a(\zeta, \tau_0) = V(\zeta, \tau_0) + a \cdot A_S(\tau_0) \cdot W(\zeta, \tau_0, a) \\ = W(\zeta, \tau_0, a)$$

7. Louter scattering

In het atmosferisch model wordt de mate van absorptie in de atmosfeer (door de deeltjes) aangegeven met de factor Γ . Onder de aanname dat geen absorptie optreedt en in de atmosfeer louter scattering plaatsvindt, wordt het model vereenvoudigd. Het is echter onmogelijk om de substitutie $\Gamma=1$ uit te voeren, omdat dit singulariteiten tot gevolg heeft. Het is wel mogelijk om via een limietproces Γ naar 1 te laten naderen. Volgens (4.25) nadert dan parameter k naar nul.

Voor de functies $V(\zeta, \tau_0)$ en $A(\zeta, \tau_0)$ geldt nu (vergelijk Sobolev(1975) §8.5.):

$$(7.1) \quad V(\zeta, \tau_0) = \frac{(E_1 P_2 \cdot \zeta + 2) \cdot E_2 - (E_2 P_2 \cdot \zeta - 2) \cdot E_1 \cdot \exp(-\tau_0/\zeta)}{E_1 \cdot E_2 / P_1 \cdot 3 \tau_0 v_0 + 2 (E_1 + E_2)}$$

$$(7.2) \quad A(\zeta, \tau_0) = 1 - V(\zeta, \tau_0)$$

De interpretatie van formule (7.2) is dat er geen energie verloren gaat. In het geval van een reflecterend oppervlak luidt de behoudswet:

$$(7.3) \quad A^a(\zeta, \tau_0) = 1 - (1 - a) \cdot V^a(\zeta, \tau_0)$$

8. Correctieformules voor satellietopnamen

De door de scanner gemeten radiantie L_A luidt volgens Van Stokkom, Guzzi (1984) in de door ons gehanteerde notatie:

$$(8.1) \quad L_A = V^a(\zeta, \tau_0) \cdot S_\zeta \cdot T \cdot r + I_O^a(0, -1) \quad , \quad T = e^{-\tau_0}$$

waarbij r de reflectie-coëfficiënt van het geobserveerde object is. Het paradoxale in formule (8.1) is, dat de gemiddelde reflectie-coëfficiënt a bekend moet zijn om de individuele coëfficiënten r te berekenen. Dit probleem wordt opgelost door r in 2 stappen te bepalen. Bereken eerst voor elke pixel r_O :

$$(8.2) \quad r_O := \frac{L_A - I_O(0, -1)}{V(\zeta, \tau_0) \cdot S_\zeta \cdot T}$$

hetgeen een correctie inhoudt op basis van een absorberend oppervlak. Bepaal vervolgens het gemiddelde \bar{r}_O van r_O , zodat

$$(8.3) \quad a := \frac{\bar{r}_O}{1 + \bar{r}_O \cdot A_S(\tau_0) + V(1, \tau_0) / T}$$

Voor de reflectie-coëfficiënt r geldt dan:

$$(8.4) \quad r := r_O - a \cdot (r_O \cdot A_S(\tau_0) + V(1, \tau_0) / T)$$

In de bepaling van het gemiddelde \bar{r}_O bestaat enige vrijheid. Een extremum is om over één pixel te "middelen", zodat $\bar{r}_O = r_O$ en r gelijk is aan het rechterlid van (8.3) met r_O gesubstitueerd. Een rigoreuze verhandeling over de invloed van buurpixels wordt gegeven door Tanre, e.a. (1979).

9. Referenties

- Chandrasekhar, S.(1960) Radiative Transfer,
Dover Publications, New York
- Guzzi, R.(1985) Spectroradiometer for ground-based atmospheric
G.C. Maracci measurements related to remote sensing in the
R. Rizzi visible from a satellite, Applied Optics,
A. Siccardi Vol.24, No.17, p.2859-64
- Kuipers, L.(1966) Handboek der Wiskunde I,
R. Timman Scheltema & Holkema, Amsterdam
- Sobolev, V.V.(1975) Light Scattering in Planetary Atmospheres,
Pergamon Press, Oxford
- Tanre, D.(1979) Atmospheric modeling for space measurements of
M. Herman of ground reflectances, including bidirectional
P.Y. Deschamps properties, Applied Optics, Vol.18, No.21,
A. de Leffe p.3587-94
- Van de Hulst, H.C.(1957) Light Scattering by Small Particles,
General Publishing Company, Toronto
- Van Stokkom, H.T.C.(1984) Atmospheric spectral attenuation of airborne
R. Guzzi remote-sensing data. Comparison between experimental and theoretical approach,
Int.J. Remote Sensing, Vol.5, No.6, p.925-38

