

**Temperatuurbelasting in een eindige elementen omgeving.**

**deel 1: evaluatie van het DIANA pakket.**

P.P.J.M. Peeters,  
Rijswijk, december 1987.

rapport BI-87-124/7282001

**IBBC**

Instituut TNO voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies

Lange Kleiweg 5, 2288 GH Rijswijk (ZH) - postbus 49 2600 AA Delft

tel. 015 - 60 60 00 Telex 38270 IBBC NL

de uitleentermijn  
loopt af op:

22 FEB. 1998

1-9-98

**BIBLIOTHEEK**

Bouwdienst Rijkswaterstaat

Postbus 20.000

3502 LA Utrecht /

*TNO Rapport*

BIBLIOTHEEK  
Bouwdienst Rijkswaterstaat  
Postbus 20.000  
3502 LA Utrecht

Titel      Temperatuurbelasting in een eindige elementen omgeving

Rapportnr.    BI-87-124

BIBLIOTHEEK BOUWDIENST RIJKSWATERSTAAT  
NR. *C 3458 BDM*

Datum      december 1987

Projectnr.    7282001

Auteur      P.P.J.M. Peeters

Trefwoord    Temperatuurbelasting

Bestemd voor    Rijkswaterstaat, in het kader van het doelsubsidie-  
project DIANA.







## Inhoudsopgave

Inhoud	Pagina
Voorwoord	1
Samenvatting	3
1. Inleiding	5
1.1 Algemeen	5
1.2 Temperatuurberekening met de Eindige Elementen Methode	6
1.3 Materiaalgedrag bij verandering van temperatuur	7
2. Elasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag	9
2.1 Constitutieve vergelijking	9
2.2 Temperatuurafhankelijke parameters	10
2.3 Testberekeningen	12
3. Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag	19
3.1 Constitutieve vergelijking	19
3.1.1 Uitgesmeerde scheurmodel	19
3.1.2 Basisrelaties	19
3.1.3 Temperatuurinvloed	22
3.1.4 Spannings-rek relatie voor gescheurd beton	22
3.2 Temperatuurafhankelijke parameters	23
3.3 Testberekeningen	27
4. Plasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag	33
4.1 Constitutieve vergelijking	33
4.2 Temperatuurafhankelijke parameters	36
4.3 Testberekeningen	39
5. Twee test gevallen	43
5.1 Dikwandige stalen buis	43
5.1.1 Constructie gegevens	43
5.1.2 Temperatuur belasting	44
5.1.3 Resultaten	44
5.2 Statisch bepaalde betonnen ligger	47
5.2.1 Constructie gegevens	47
5.2.2 Temperatuur belasting	49
5.2.3 Resultaten	49
6. Conclusies en aanbevelingen	55
Literatuurlijst	57
Bijlagen	59









## Voorwoord

Dit rapport is een verslag van de eerste fase van een afstudeeropdracht in de vakgroep Mechanica en Constructies van de faculteit Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. De opdracht luidde "Evalueren van het DIANA-pakket voor betonconstructies onderworpen aan thermische belastingen". Het onderzoek is verricht bij de DIANA-groep van TNO-IBBC in het kader van het doelsubsidieproject DIANA van rijkswaterstaat.

Eerder is in het kader van een afstudeeropdracht gewerkt aan dit onderwerp (van Foeken, 1983). Een vernieuwde opzet van het moduul NONLIN en het gebruik van twee en drie dimensionale elementen maakten een nieuwe evaluatieopdracht gewenst.

Het afstudeerwerk is verricht onder leiding van de afstudeerhoogleraren

Prof.dr.ir.J. Blaauwendraad en  
Prof.Dr.-Ing.H.W. Reinhardt.

De begeleiding vanuit TNO-IBBC werd verzorgd door

Dr.ir.R. de Borst en  
Ir.G.M.A. Kusters.

René de Borst trad op als dagelijks begeleider en Ger Kusters heeft als hoofd van de afdeling de supervisie over het project in handen gehad.

Naast genoemde personen wil ik speciaal alle DIANA-medewerkers bedanken voor de zeer plezierige wijze waarmee ik met hen heb mogen samenwerken. Met name wil ik de hulp van Pier Nauta bij de verwerking van de geëvalueerde problemen noemen.

Rijswijk, december 1987,  
P.P.J.M. Peeters.





## Samenvatting

Temperatuurbelasting op een constructie heeft een specifiek materiaalgedrag tot gevolg. De constructiematerialen beton en staal zetten uit bij verhoging van de temperatuur. Enkele belangrijke materiaaleigenschappen, zoals de stijfheid en de sterkte, zijn een functie van de temperatuur.

De theorie van de temperatuurinvloed op de constitutieve vergelijking in combinatie met scheurvorming en plasticiteit is geformuleerd. Door middel van numerieke berekeningen met één element is geëvalueerd of het eindige elementenmethode pakket DIANA de theorie juist beschrijft.

Twee constructies onderworpen aan een uniforme temperatuurverhoging zijn analytisch en numeriek berekend; een dikwandige stalen buis onder inwendige overdruk die bezwijkt door vloeien van de gehele buisdoorsnede en een gewapend betonnen ligger met een gelijkmatig verdeelde belasting die bezwijkt op buiging.



## 1. Inleiding

### 1.1 Algemeen

Het gedrag van constructies is niet constant bij een verandering van de temperatuur. In een berekening met een niet-stationair temperatuurverloop veranderen de rekken en/of de spanningen in een materiaal in de loop van de tijd. Indien temperatuur afhankelijk is van de tijd spreken we van een temperatuurbelasting.

Het probleem van een temperatuurbelasting kan opgelost worden met behulp van de eindige elementenmethode. In het kader van dit afstudeerwerk is onderzoek verricht naar de behandeling van temperatuurbelasting in het eindige elementenmethode-pakket DIANA. Het probleem is als volgt opgesplitst:

- beschrijven van de theorie
- evalueren van de bestaande software
- uitbreiden van de implementatie
- berekenen van reële constructies

Het verrichte onderzoek wordt beschreven in drie rapporten. In het eerste rapport wordt een gedeelte van de theorie uitgewerkt en wordt de evaluatie van de bestaande software beschreven. Het tweede rapport behandelt de uitbreiding van het programma en de evaluatie daarvan. Enkele berekeningen van reële constructies worden beschreven in het derde rapport.

De evaluatie van een groot software pakket vereist een systematische aanpak. Het is onmogelijk te bewijzen dat een bepaald pakket in alle mogelijke gevallen foutloze oplossingen geeft. Om aan te tonen dat het elementenmethode-pakket DIANA met betrekking tot temperatuurbelasting betrouwbare resultaten levert, is getracht de theorie systematisch te evalueren.

Allereerst worden testen uitgevoerd op één element, waarbij de spanningen en rekken analytisch exact kunnen worden bepaald. Na deze testen worden complete constructies doorgerekend, waarbij het mogelijk is naast numerieke resultaten ook analytische resultaten te verkrijgen. Op deze manier kan geëvalueerd worden of de theoretische modellen op de juiste manier in het programma zijn verwerkt.

Indien alle fenomenen die een relevante rol spelen bij temperatuurbelasting geïmplementeerd en getest zijn, kunnen laboratorium experimenten worden nagerekend of voorspeld. Het is dan mogelijk om de betrouwbaarheid van de modelvorming te toetsen.

Nadat de nauwkeurigheid van de modelvorming en de betrouwbaarheid van de software aangetoond zijn kunnen praktijkgevallen worden geanalyseerd. Het blijft echter zaak om de numerieke resultaten kritisch te onderzoeken en de betrouwbaarheid te toetsen.

Dit rapport is het eerste deelverslag van het afstudeeronderzoek. De invloed van de temperatuur op de spannings-rek relatie wordt beschouwd. De niet-lineaire fenomenen scheurvorming en plasticiteit worden opgenomen in de temperatuurafhankelijke constitutieve relatie. Verder wordt de combinatie van twee materialen beschouwd, waarbij in eerste instantie gedacht wordt aan beton in combinatie met wapening of voorspanning.



## Inleiding

Getest zijn drie 2-dimensionale elementen en één volume element. De 2-dimensionale elementen zijn isoparametrisch en hebben 8 knopen en 16 vrijheidsgraden. Het betreft een membraan element (CQ16M), een element met een vlakke vervormings toestand (CQ16E) en een axiaal-symmetrisch element (CQ16A). Het volume element heeft 20 knopen en 60 vrijheidsgraden (CHX60). Meer informatie over de gebruikte elementen staat beschreven in de gebruikershandleiding (de Witte, 1987a).

Behalve als eerste deel van een afstudeerverslag is dit rapport tevens bedoeld als documentatie van de in DIANA geëvalueerde fenomenen. Naast een behandeling van de modellen voor temperatuurafhankelijke constitutieve relaties zal de lezer in dit verslag een systematische weergave vinden van de uitgevoerde testberekeningen.

De bredere context van de beschouwde theorie wordt behandeld in de volgende twee paragrafen van deze inleiding. In de eerste paragraaf staat beschreven hoe de temperatuurbelasting in de elementen methode behandeld wordt. In de laatste paragraaf wordt het materiaalgedrag bij verandering van de temperatuur nader beschouwd. Indien de lezer geïnteresseerd is in genoemde onderwerpen wordt hij in deze paragrafen verwezen naar de literatuur.

Na de inleiding wordt in het tweede hoofdstuk de constitutieve vergelijking afgeleid van een lineair-elastisch materiaal met temperatuurafhankelijke eigenschappen. De parameters die afhankelijk zijn van de temperatuur worden behandeld. Beschreven worden de geïmplementeerde temperatuurrelaties. Als laatste paragraaf van dit hoofdstuk volgt een verslag van de gemaakte testberekeningen op één element.

De twee volgende hoofdstukken hebben dezelfde opbouw. Het materiaal blijft echter niet elastisch maar de temperatuurafhankelijkheid wordt gecombineerd met respectievelijk scheurvorming en plasticiteit.

Als laatste hoofdstuk voor de conclusies worden twee test cases beschouwd. Het betreft hier constructies, onderworpen aan een temperatuurbelasting, die zowel theoretisch als numeriek worden berekend.

### 1.2 Temperatuurberekening met de Eindige Elementen Methode

De lezer wordt bekend verondersteld met de eindige elementenmethode of verwezen naar de literatuur (bijv. Bathe, 1982). Voor kennis omtrent het eindige elementenmethode-pakket DIANA wordt verwezen naar de gebruikershandleiding (de Witte, 1987a), het DIANA statica cursus-dictaat (de Witte, 1987b) en enige artikelen (de Borst, 1983 en 1984a). In deze paragraaf wordt de plaats van de temperatuurbelasting in de elementenmethode behandeld.

Voordat aan de sterkteberekening wordt begonnen moet de temperatuurverdeling in de constructie in de loop van de tijd worden bepaald. Het verloop van een temperatuurberekening is als volgt:

#### 1. Bepalen van de temperatuurbelasting.

In het geval van brand in een gebouw wordt de temperatuurbelasting bepaald met behulp van een standaard brandkromme (Gantvoort, 1983), zoals bepaald in de voorschriften. In

meer bijzondere gevallen kan men de stralingsintensiteit bepalen. De stralingsintensiteit is de warmte die per tijdseenheid op een bepaald oppervlak straalt. Behalve een temperatuurverhoging kan de belasting ook bestaan uit een temperatuurverlaging.

### 2. Berekenen van het temperatuurverloop.

Uit de temperatuurbelasting kan het temperatuurverloop in de tijd berekend worden. Dit verloop is in het algemeen niet constant over de doorsnede van een constructie. Het temperatuurveld in een constructie kan zowel analytisch als numeriek berekend worden. Een numerieke berekening is mogelijk met behulp van de eindige elementenmethode. In DIANA is een apart moduul aanwezig voor stationaire en niet-stationaire warmtestromingsberekeningen (Jansen, 1985). De uitvoer van een dergelijke berekening kan dienen als invoer van een sterkteberekening.

### 3. Berekenen van de rekken en spanningen.

In een sterkteberekening met temperatuurbelasting wordt eerst de belasting aangebracht die aanwezig is voordat de temperatuur verandert. Vervolgens worden in het moduul voor niet-lineariteit NONLIN tijdstappen opgegeven. Voor iedere knoop wordt een tijd-temperatuur tabel ingevoerd, zoals bepaald in de warmtestromingsberekening. De materiaal parameters worden met behulp van een tabel afhankelijk gesteld van de temperatuur. Het is mogelijk om een belasting-tijd diagram mee te geven. In iedere tijdstap verandert de temperatuur. Hierdoor veranderen de rekken en spanningen als gevolg van de uitzetting, de veranderde materiaaleigenschappen en als gevolg van de eventueel veranderde belasting.

## 1.3 Materiaalgedrag bij verandering van temperatuur

Een verandering van de temperatuur heeft invloed op het materiaal gedrag. Bij een beschouwing van de constructiematerialen beton en staal kunnen deze veranderingen als volgt worden ingedeeld:

- Volumeverandering van het materiaal.
- Temperatuurafhankelijkheid van materiaalparameters.
- Optreden van een specifieke kruip.

### Volumeverandering van het materiaal.

Bij een stijging van de temperatuur zetten staal en beton uit. De volumeverandering per graad temperatuurverandering wordt weergegeven door de materiaalparameter  $\alpha$ , de thermische uitzettingscoëfficiënt. Deze volumeverandering is te beschouwen als een opgelegde vervorming. Indien de vervorming niet vrij kan optreden, ontstaan er spanningen in de constructie.

### Temperatuurafhankelijkheid van materiaalparameters.

In principe zijn alle materiaaleigenschappen afhankelijk van de temperatuur. Het is echter niet voor alle parameters relevant om een temperatuurafhankelijk gedrag te beschouwen. Uitgebreid onderzoek is verricht naar de temperatuurafhankelijkheid van de elasticiteitsmodulus  $E$ , de drukstrekte  $f_{cc}$  en de thermische uitzettingscoëfficiënt  $\alpha$  van beton (zie o.a. Schneider, 1982 en



## Inleiding

Anderberg, 1976).

Ook voor staal zijn de elasticiteitsmodulus  $E$ , de vloeisterkte  $\sigma_{vl}$  en de thermische uitzettingscoëfficiënt  $\alpha$  in relatie tot de temperatuur onderzocht (zie o.a. Anderberg, 1983).

### **Optreden van een specifieke kruip.**

Beton kent bij verhoging van de temperatuur een specifieke vorm van kruip. Deze is afhankelijk van het spanningsniveau en treedt alleen op bij de eerste maal verhogen van de temperatuur. De kruiprek is irreversibel. Na een temperatuurdaling en weer een stijging tot het eerder bereikte niveau verandert de kruiprek niet. Bij verdere verhoging tot een niet eerder bereikte waarde zal het beton onder invloed van spanning verder kruipen. Bij hogere temperaturen vindt de kruip zeer snel plaats. In dit rapport wordt deze specifieke kruip nog niet behandeld. Zowel de fenomenologische behandeling van dit probleem als de implementatie van de kruip in de eindige elementenmethode wordt beschreven in een volgend rapport.



## 2. Elasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

### 2.1 Constitutieve vergelijking

Uitgangspunt voor de hier beschouwde spannings-rek relaties is de ontbinding van de totale rek in verschillende rekcomponenten. In het geval van lineair materiaalgedrag met een verandering van de temperatuur bestaat de totale rek uit twee rekcomponenten.

$$\tau_{\epsilon} = \tau_{\epsilon}^e + \tau_{\epsilon}^{\theta} \quad (2.1)$$

waarin

$\tau_{\epsilon}$  totale rekvector

$\tau_{\epsilon}^e$  elastische rekvector

$\tau_{\epsilon}^{\theta}$  thermische rekvector

Het linker superscript geeft de tijdsreferentie van de variabelen aan.

De thermische rekvector hangt alleen af van de thermische uitzettingscoëfficiënt  $\alpha$  en van de temperatuur  $T$ .

$$\tau_{\epsilon}^{\theta} = \tau_{\alpha} (\tau_T - {}^0T) \mathbf{a} \quad (2.2)$$

met

${}^0T$  referentietemperatuur

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

De constitutieve vergelijking voor een isotroop lineair-elastisch materiaal met temperatuurafhankelijke eigenschappen wordt volgens de wet van Hooke als volgt weergegeven.

$$\tau_{\sigma} = \tau_{\mathbf{D}} (\tau_{\epsilon} - \tau_{\epsilon}^{\theta}) \quad (2.3)$$

waarin

$\tau_{\mathbf{D}}$  elastische stijfheidsmatrix

Differentiëren naar de tijd levert de volgende uitdrukking op.

$$\tau_{\dot{\sigma}} = \tau_{\mathbf{D}} (\tau_{\dot{\epsilon}} - \tau_{\dot{\epsilon}}^{\theta}) + \tau_{\dot{\mathbf{D}}} (\tau_{\epsilon} - \tau_{\epsilon}^{\theta}) \quad (2.4)$$

Voor het oplossen van de differentiaalvergelijking met behulp van de eindige elementenmethode wordt overgegaan op een incrementele beschrijving. Daartoe wordt vergelijking 2.4 geïntegreerd van tijdstip  $t$  tot tijdstip  $t + \Delta t$ .

## Elasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

$$\int_t^{t+\Delta t} \dot{\sigma} dt = \int_t^{t+\Delta t} \dot{D}(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^\theta) dt + \int_t^{t+\Delta t} \dot{D}(\epsilon - \epsilon^\theta) d\tau \quad (2.5)$$

Het verschil van de grootheden op tijdstip  $t + \Delta t$  en de grootheden op tijdstip  $t$  wordt weergegeven door een increment.

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + \Delta\sigma \quad (2.6)$$

$${}^{t+\Delta t}D = {}^tD + \Delta D \quad (2.7)$$

$${}^{t+\Delta t}\epsilon = {}^t\epsilon + \Delta\epsilon \quad (2.8)$$

$${}^{t+\Delta t}\epsilon^\theta = {}^t\epsilon^\theta + \Delta\epsilon^\theta \quad (2.9)$$

Vergelijking 2.5 wordt geïntegreerd met een trapeziumregel. Gebruik maken van bovenstaande identiteiten geeft de volgende uitdrukking voor de incrementele spanning.

$$\Delta\sigma = {}^tD(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^\theta) + \frac{1}{2}\Delta D(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^\theta) + \Delta D({}^t\epsilon - {}^t\epsilon^\theta) + \frac{1}{2}\Delta D(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^\theta) \quad (2.10)$$

$$\Delta\sigma = {}^{t+\Delta t}D(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^\theta) + \Delta D({}^t\epsilon - {}^t\epsilon^\theta) \quad (2.11)$$

Een uitdrukking voor de incrementele thermische rek kan verkregen worden door vergelijking (2.2) te integreren met de regel van Heun.

$$\Delta\epsilon^\theta = \frac{1}{2} \left[ {}^t\alpha + {}^{t+\Delta t}\alpha \right] \Delta T_a \quad (2.12)$$

Voor een lineair elastisch materiaal waarbij de uitzettingscoëfficiënt lineair verloopt tussen twee tijdstappen, is de integratie van vergelijking 2.5 exact. Om dit aan te tonen beschouwen we het verschil van vergelijking 2.3 op tijdstip  $t$  en op tijdstip  $t + \Delta t$ .

$${}^{t+\Delta t}\sigma - {}^t\sigma = {}^{t+\Delta t}D({}^{t+\Delta t}\epsilon - {}^{t+\Delta t}\epsilon^\theta) - {}^tD({}^t\epsilon - {}^t\epsilon^\theta) \quad (2.13)$$

Invullen van de relaties voor de grootheden op tijdstip  $t + \Delta t$  in vergelijking (2.13) geeft de relatie tussen de incrementele spanning en de incrementele rek.

$$\Delta\sigma = ({}^tD + \Delta D)({}^t\epsilon + \Delta\epsilon - {}^t\epsilon^\theta - \Delta\epsilon^\theta) - {}^tD({}^t\epsilon - {}^t\epsilon^\theta) \quad (2.14)$$

of

$$\Delta\sigma = {}^{t+\Delta t}D(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^\theta) + \Delta D({}^t\epsilon - {}^t\epsilon^\theta) \quad (2.15)$$

Vergelijking (2.11) en (2.15) zijn identiek.

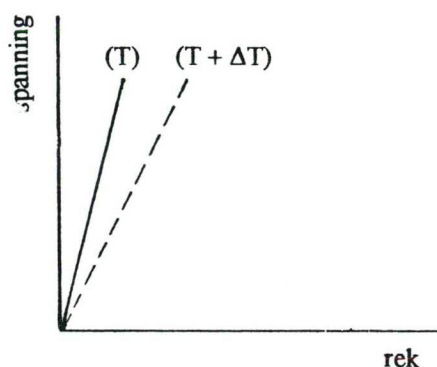
In het vervolg zullen de superscripts  $t$  en  $t + \Delta t$  in de vergelijkingen worden vermeden uit overwegingen van overzichtelijkheid. Waar niet duidelijk is welke tijdsreferentie wordt bedoeld zal dit afzonderlijk vermeld worden.

## 2.2 Temperatuurafhankelijke parameters

Het thermische rekincrement wordt bepaald door de temperatuur en de thermische uitzettingscoëfficiënt  $\alpha$ . Deze laatste kan afhankelijk zijn van de temperatuur. In DIANA is het mogelijk om met deze afhankelijkheid rekening te houden.

De temperatuur heeft verder invloed op de stijfheidsmatrix. In de lineair elastische fase wordt de stijfheidsmatrix beschreven met twee parameters. Hiervoor worden de elasticiteitsmodulus  $E$  en de dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$  gebruikt. Op dit moment is het in DIANA alleen mogelijk om  $E$  afhankelijk te stellen van de temperatuur. Proeven worden vaak éénassig uitgevoerd. Hiermee is duidelijk de invloed van de temperatuur op de elasticiteitsmodulus aan te tonen. Minder resultaten zijn bekend over de invloed van de temperatuur op de dwarscontractiecoëfficiënt. In het algemeen wordt aangenomen dat deze invloed in het lineair-elastische gebied gering is.

De invloed van de temperatuur op de éénassige spannings-rek relatie voor een lineair elastisch materiaal is weergegeven in figuur 2.1. De doorgetrokken lijn geeft de relatie weer voor temperatuur  $T$ , de stippellijn voor temperatuur  $T + \Delta T$ . De  $E$ -modulus voor temperatuur  $T + \Delta T$  is kleiner dan de  $E$ -modulus voor temperatuur  $T$ .



figuur 2.1. invloed van de temperatuur op het  $\sigma$ - $\epsilon$  diagram.

Bij een composiet materiaal is het mogelijk om de parameters van de verschillende materialen apart te specificeren. Dit geldt ook voor de temperatuurafhankelijkheid van deze parameters. Een voorbeeld van een dergelijk geval is gewapend beton. De elasticiteitsmoduli van het staal en het beton hangen niet op dezelfde wijze af van de temperatuur.

Een speciaal geval treedt op bij voorspanning. In DIANA kan voorspanning gesimuleerd worden door het opgeven van een initiële spanning in het wapeningsstaal. Dit is gewenst daar het overeenkomt met de praktische behandeling van de voorspanning. In werkelijkheid krijgt het staal echter een initiële vervorming. Vermenigvuldiging met de elasticiteitsmodulus levert de initiële spanning op. Indien nu de elasticiteitsmodulus afneemt ten gevolge van een temperatuurverhoging, dan blijft de initiële rek gelijk maar vermindert de spanning die uit deze rek onstaat. De enige juiste manier van behandelen van de voorspanning in een eindige elementen omgeving wordt dan ook verkregen door de initiële spanning bij temperatuurverhoging om te zetten in een initiële rek.

Ter complementering van de materiaalparameters van een isotroop lineair elastisch materiaal wordt de soortelijke massa  $\rho$  nog vermeld. Door een verandering van de temperatuur verandert het volume van een materiaal, maar niet het eigen gewicht. Dit maakt  $\rho$  afhankelijk van de temperatuur. Het is echter niet relevant temperatuurafhankelijkheid van deze parameter te



## Elasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

beschouwen aangezien het eigen gewicht van een constructie wordt berekend ten opzichte van het oorspronkelijke volume.

In tabel 2.1 staan de mogelijkheden vermeld van DIANA om temperatuurafhankelijk gedrag van materiaalparameters te beschouwen voor een isotroop lineair elastisch materiaal.

parameter	invloed van temperatuur
E	mogelijk
$\nu$	niet mogelijk
$\alpha$	mogelijk
$\rho$	niet mogelijk

*tabel 2.1: parameters van een isotroop lineair elastisch materiaal.*

### 2.3 Testberekeningen

Diverse testberekeningen zijn gemaakt met één element. Deze testen zijn alle uitgevoerd voor drie twee dimensionale elementen en voor een volume element. De twee dimensionale elementen bestaan uit een vlakke vervorming element CQ16E, een vlakke spanning element CQ16M en een axiaalsymmetrisch element CQ16A. Het axiaalsymmetrisch element heeft bij de meeste testen een zeer grote straal zodat de uitkomsten dezelfde moeten zijn als voor een vlakke vervorming element. Het geteste volume element is het driedimensionale element CHX60.

Getracht is systematisch aan te tonen dat de behandelde spannings-rek relatie uit paragraaf 2.1 op correcte wijze is geïmplementeerd. Na een kleine uitbreiding voor het volume element en enkele wijzigingen in de software bleek het programma de gemaakte berekeningen betrouwbaar uit te voeren.

#### **Uitgevoerde testberekeningen.**

In de tabellen 2.2 en 2.3 zijn de uitgevoerde testberekeningen weergegeven. Vermeld wordt of er rekening is gehouden met volumeverandering in de vorm van een thermische rek  $\epsilon^{\theta}$ . Tevens wordt aangegeven of de elasticiteitsmodulus E en de uitzettingscoëfficiënt  $\alpha$  afhankelijk zijn gesteld van de temperatuur.

Ongewapend materiaal:

	$\epsilon^{\theta}$	E (T)	$\alpha$ (T)
test 1	X		
test 2		X	
test 3	X	X	
test 4	X	X	X

*tabel 2.2: één-elementtesten op isotroop lineair elastisch materiaal.*

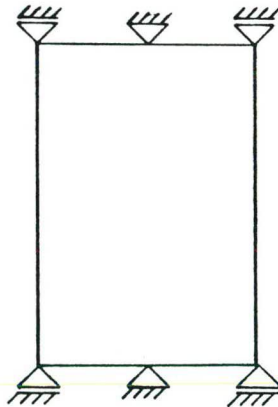
Gewapend materiaal:

	moedermateriaal			wapening		
	$\epsilon^0$	E (T)	$\alpha$ (T)	$\epsilon^0$	E (T)	$\alpha$ (T)
test 5	X			X		
test 6		X			X	
test 7	X	X	X	X	X	X

tabel 2.3: één-elementtesten op isotroop lineair elastisch materiaal met wapening.

**Uitgewerkte testen: test 3 met het vlakke vervorming element CQ16E.**

Een rechthoekig proefstuk wordt aan twee zijden opgesloten. De belasting bestaat uit een uniforme temperatuurverhoging. Het materiaal heeft een constante uitzettingscoëfficiënt. De elasticiteitsmodulus is een functie van de temperatuur. De gegevens zijn te zien in figuur 2.2 en figuur 2.3.



figuur 2.2. constructie.

Tot 200°C zal de spanning lineair toenemen. Bij verdere verwarming wordt de elasticiteitsmodulus kleiner, zodat de spanningstoename minder wordt, en later zelfs afneemt. Bij 750°C is de E-modulus gereduceerd tot nul. Het proefstuk staat niet meer onder spanning.

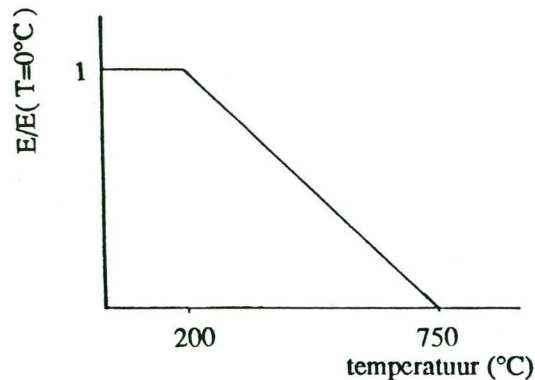
*Analytische oplossing.*

De constructie is ingesloten, de totale rek blijft nul. De elastische rek is tegengesteld aan de thermische rek. De spanning is een functie van de E-modulus, de uitzettingscoëfficiënt en van de temperatuur.

$$\sigma = E (-\alpha T)$$

Voor de E-modulus op de aanvangstemperatuur en voor de uitzettingscoëfficiënt zijn de volgende waarden gebruikt.

## Elasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag



figuur 2.3. E-modulus als functie van de temperatuur.

$$T < 200^{\circ}\text{C} \quad E = E^0 \quad 200^{\circ}\text{C} < T < 750^{\circ}\text{C} \quad E = E^0 \frac{750 - T}{550}$$

met

$$E^0 = 3 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$$

De analytische oplossing volgt uit de substitutie van de E-modulus als functie van de temperatuur in de uitdrukking voor de spanning.

### Resultaten

In figuur 2.4 zijn de resultaten van de analytische berekening grafisch weergegeven. De sterretjes in de figuur geven de resultaten van DIANA weer. Onafhankelijk van de stapgrootte convergeert de numerieke oplossing in één iteratieslag naar de analytische oplossing.

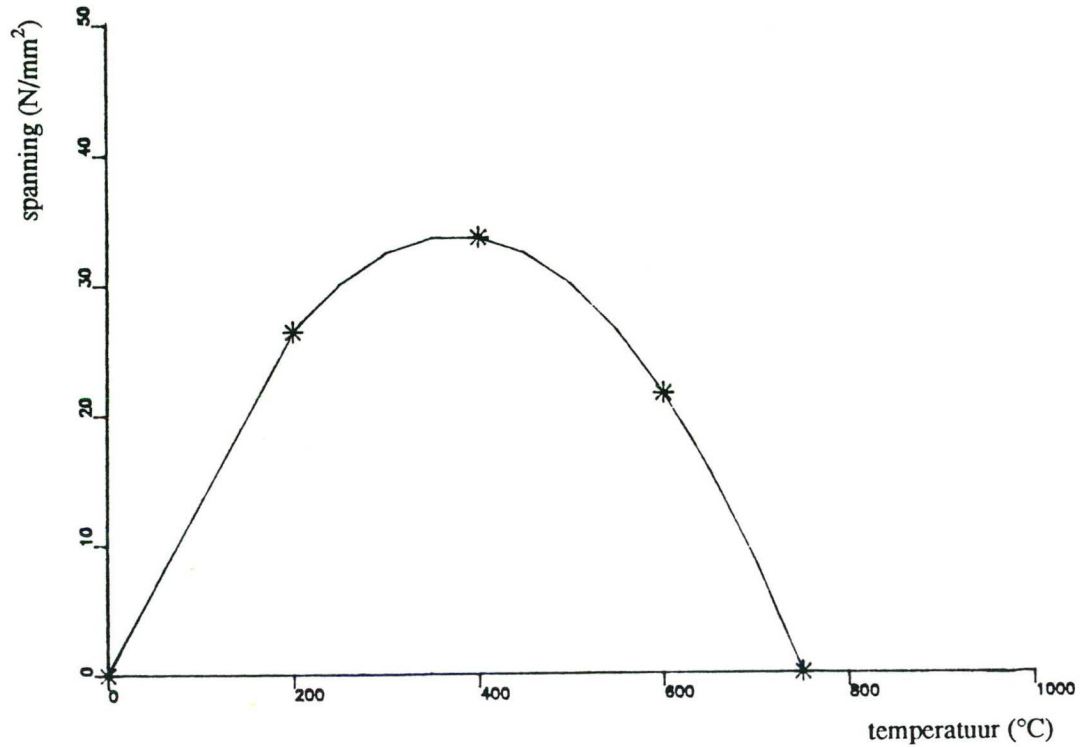
### Uitgewerkte testen: test 7 met het axiaalsymmetrisch element CQ16A.

Hetzelfde proefstuk wordt nu aan een zijde opgelegd en aan de andere zijde vrijgelaten (figuur 2.5). De belasting bestaat enkel uit een uniforme temperatuurverhoging. In het midden van het proefstuk ligt een wapeningselement. Van beide materialen zijn zowel de uitzettingscoëfficiënt als de E-modulus een functie van de temperatuur (figuur 2.6 en 2.7). Als gevolg van een ongelijke uitzetting zal er een spanning in beide materialen ontstaan. Aanvankelijk loopt de spanning op omdat het verschil in uitzetting groter wordt. Later neemt de spanning af tot nul omdat de E-modulus van het moedermateriaal terugloopt tot nul.

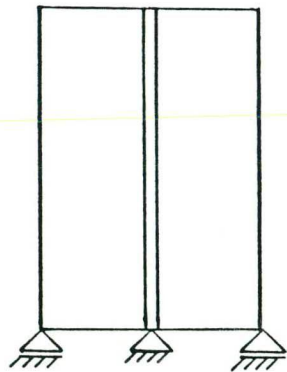
### Analytische oplossing.

De uitwendige belasting blijft nul. De krachten van moedermateriaal en wapening zijn in evenwicht. Er wordt volledige aanhechting verondersteld. De totale rek van de wapening is gelijk aan de totale rek van het moedermateriaal. Uitwerken van de uitgangspunten geeft de volgende uitdrukking voor de spanning in het moedermateriaal.





figuur 2.4. spannings-temperatuur diagram.

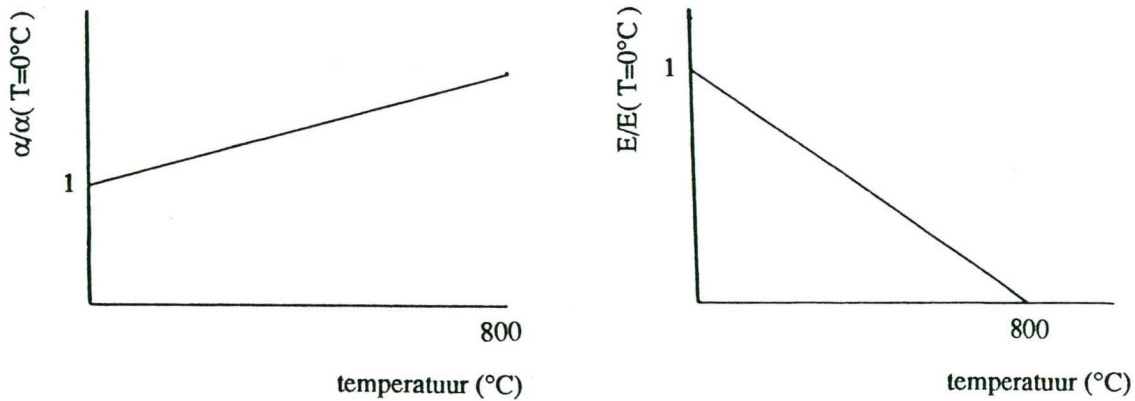


figuur 2.5. constructie.

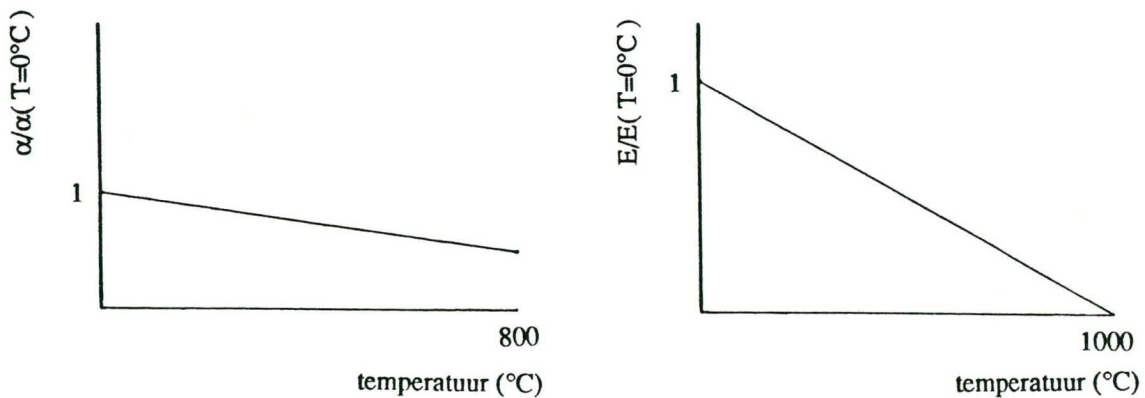
$$\sigma^c = \frac{\omega E^s E^c}{E^c + \omega E^s} (\alpha^s - \alpha^c) T$$

Het superscript c verwijst naar het moedermateriaal, het superscript s verwijst naar de wapening. Het wapeningspercentage  $\omega$  bedraagt 1%. De temperatuurrelaties voor de materiaaleigenschappen zijn de volgende.

## Elasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag



figuur 2.6. de materiaaleigenschappen van het moedermateriaal als functie van de temperatuur.



figuur 2.7. de materiaaleigenschappen van de wapening als functie van de temperatuur.

$$E^s = \frac{E^{s0}}{1000} (1000 - T) \quad E^c = \frac{E^{c0}}{800} (800 - T)$$

$$\alpha^s = \alpha^{s0} \left( 1 - \frac{T}{1600} \right) \quad \alpha^c = \alpha^{c0} \left( 1 + \frac{T}{800} \right)$$

De volgende numerieke waarden worden aangenomen.

$$E^{s0} = 3 \cdot 10^4$$

$$E^{c0} = 21 \cdot 10^4$$

$$\alpha^{s0} = \alpha^{c0} = 12 \cdot 10^{-6}$$

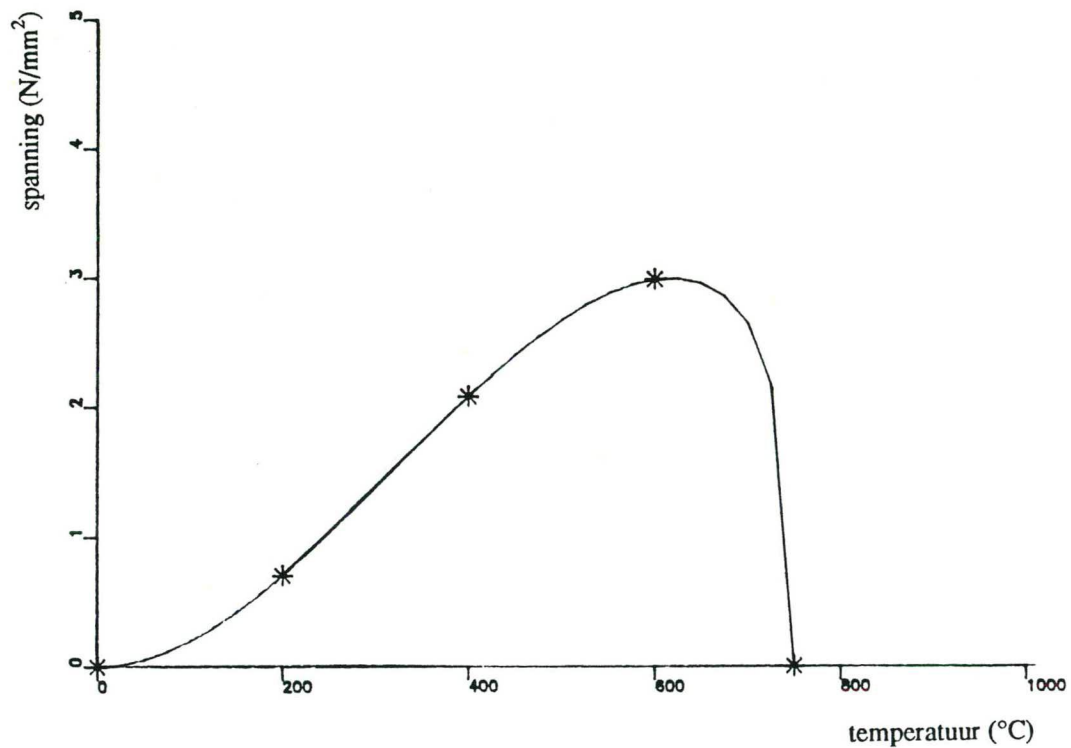
Substitutie van deze relaties in de uitdrukking voor de spanning geeft de gezochte analytische oplossing. Numerieke waarden zijn verkregen met behulp van eenvoudig elektronisch rekenwerk.

### Resultaten.

Theoretisch moet de numerieke oplossing onafhankelijk van de stapgrootte in een iteratieslag

## Elasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

naar de analytische oplossing convergeren. De enige voorwaarde is een lineaire temperatuurafhankelijkheid van de uitzettingscoëfficiënt. In de gemaakte berekening is aan deze voorwaarde voldaan. De numerieke berekening beschrijft de analytische berekening dan ook exact (figuur 2.8).



figuur 2.8. spannings-temperatuur diagram.



### 3. Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

#### 3.1 Constitutieve vergelijking

##### 3.1.1 Uitgesmeerde scheurmodel

Scheurvorming is een complex probleem in de niet-lineaire numerieke mechanica. Voor de oplossing van dit probleem zijn in de praktijk twee modellen in omloop, het discrete scheurmodel en het uitgesmeerde scheurmodel. In de eerste aanpak ontstaat, op grond van een bepaald scheurcriterium, een discrete scheur langs de rand tussen twee elementen. In bepaalde programma's kan de scheur ook binnen een element ontstaan. Het programma genereert nieuwe vrijheidsgraden. In de tweede aanpak wordt de scheur uitgesmeerd over een bepaald gebied behorende bij een integratiepunt van een element.

In dit hoofdstuk zal het uitgesmeerde scheurmodel, zoals geïmplementeerd in DIANA, worden behandeld. Dit model is ontwikkeld door Rots e.a. (1985) en de Borst en Nauta (1985). Toegevoegd aan dit model is een temperatuurafhankelijk materiaal gedrag. Zowel de parameters die de stijfheidsmatrix van het ongescheurde materiaal beschrijven als de scheurvormingsparameters worden afhankelijk gesteld van de temperatuur.

De behandeling van scheurvorming wordt toegespitst op het materiaal beton hoewel deze beperking in principe niet noodzakelijk is.

##### 3.1.2 Basisrelaties

De basis voor het uitgesmeerde scheuren concept vormt de verdeling van het totale rek increment in een betonrek increment en een scheurrek increment.

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^{\text{co}} + \Delta \epsilon^{\text{cr}} \quad (3.1)$$

Het betonrek increment kan bestaan uit verschillende bijdragen zoals elastische rek, thermische rek, krimprek en plastische rek. Hierdoor is het mogelijk de scheurvorming te behandelen in combinatie met andere niet-lineaire fenomenen. De scheurrek kan de bijdrage van verschillende afzonderlijke scheuren bevatten. Zo kunnen in een integratiepunt meerdere scheuren ontstaan. In dit hoofdstuk wordt alleen een enkele scheur behandeld. Voor de weergave van de basis relaties wordt voor de totale rek alleen de elastische rek beschouwd. Er wordt nog geen rekening gehouden met de invloed van de temperatuur.

$$\Delta \epsilon^{\text{co}} = \Delta \epsilon^{\text{e}} \quad (3.2)$$

Door de opsplitsing van de totale rek is het mogelijk om de relatie tussen de spanning en de scheurrek apart te definiëren. Deze relatie levert samen met de relatie tussen de spanning en de elastische rek een relatie op tussen de spanning en de totale rek.

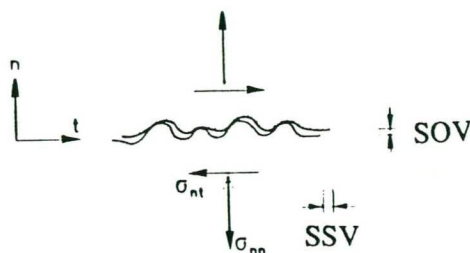
##### Relatie tussen de spanning en de scheurrek.

Een scheur veroorzaakt verplaatsingen tussen de scheuroppervlakken. Voor het 2 dimensionale geval is dit weergegeven in figuur 3.1. SOV staat hier voor scheur openings verplaatsing, SSV voor scheur slip verplaatsing.

In het uitgesmeerde scheurmodel wordt de scheur openings verplaatsing vervangen door een locale scheurrek, loodrecht op de scheur  $\epsilon_{\text{nn}}^{\text{cr}}$ . De scheur slip verplaatsing wordt vervangen door



## Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag



figuur 3.1. scheuroppervlak spanningen en relatieve verplaatsingen.

een locale scheurrek, evenwijdig aan de scheur  $\gamma_{nt}^{cr}$ . De globale scheurrekken worden verkregen door transformatie van de locale scheurrekken naar de globale coördinaten.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{cr} \\ \epsilon_{yy}^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{nn}^{cr} \\ \gamma_{nt}^{cr} \end{bmatrix}$$

of

$$\epsilon^{cr} = N \epsilon^{cr} \quad (3.3)$$

waarin

$\epsilon^{cr}$  globale scheurrek vector

$e^{cr}$  locale scheurrek vector

$\theta$  hoek tussen de globale x-as en de normaal op de scheur

$N$  transformatiematrix

De relatie tussen de scheurspanningen en de globale spanningen wordt weergegeven met behulp van de getransponeerde transformatiematrix  $N$ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn}^{cr} \\ \sigma_{nt}^{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

of

$$s^{cr} = N^T \sigma \quad (3.4)$$

waarin

$\sigma^{cr}$  globale spannings vector



$\mathbf{s}^{cr}$  locale scheuroppervlak spannings vector

$\mathbf{N}^T$  getransponeerde transformatiematrix

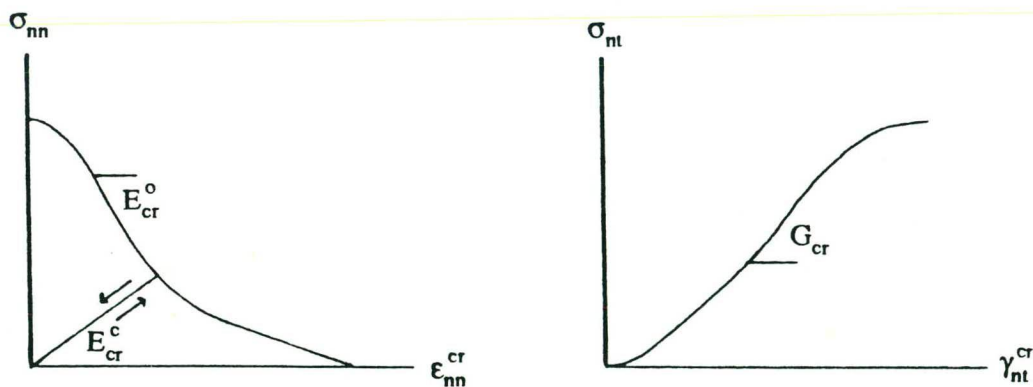
Er wordt verondersteld dat de incrementele scheurrekken en de incrementele scheurspanningen aan elkaar gerelateerd zijn door de matrix  $\mathbf{D}^{cr}$ . In het vervolg zal deze matrix scheurstijfheidsmatrix worden genoemd.

$$\Delta \mathbf{s}^{cr} = \mathbf{D}^{cr} \Delta \mathbf{e}^{cr} \quad (3.5)$$

De scheurstijfheidsmatrix wordt beschreven als volgt.

$$\mathbf{D}^{cr} = \begin{bmatrix} E_{cr} & 0 \\ 0 & G_{cr} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

- In het huidige model zijn de koppeltermen gelijk aan nul gesteld. In werkelijkheid zal interactie plaatsvinden tussen spanningsoverdracht loodrecht op de scheur en de spanningsoverdracht evenwijdig aan de scheur (Walraven, 1980). Hoewel het model de mogelijkheid biedt om deze interactie in rekening te brengen is dit nog niet uitgevoerd.
- $E_{cr}$  geeft de relatie weer tussen de spanning loodrecht op de scheur en de rek loodrecht op de scheur. Bij een opengaande scheur is deze term negatief,  $E_{cr}^o$  in figuur 3.2. Indien de scheur sluit wordt aangenomen dat normaalspanning en de normaalrek beide lineair teruglopen naar nul. Dit wordt weergegeven door  $E_{cr}^c$  in onderstaande figuur. Bij heropening van de scheur volgt de spanning dit pad in tegengestelde richting tot het oude niveau van de scheurrek is bereikt. Nog verder openen van de scheur gaat weer volgens de term  $E_{cr}^o$ .
- $G_{cr}$  geeft de relatie weer tussen de schuifspanning en de schuifrek evenwijdig aan de scheur.



figuur 3.2. definitie van de stijfheid  $E_{cr}^o$ ,  $E_{cr}^c$  en  $G_{cr}$

#### Relatie tussen de spanning en de elastische rek.

De relatie tussen de spanning en de elastische rek wordt weergegeven door de wet van Hooke. De elastische rek is om te schrijven in de totale rek en de scheurrek met de vergelijkingen 3.1 en 3.2

## Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

$$\Delta \sigma = D \Delta \epsilon^e = D \left[ \Delta \epsilon - \Delta \epsilon^{cr} \right] \quad (3.7)$$

De matrix  $D$  wordt bepaald door twee parameters, de elasticiteitsmodulus  $E$  en de dwarscontactcoëfficiënt  $\nu$ .

### 3.1.3 Temperatuurinvloed

Bij een verandering van de temperatuur veranderen de materiaaleigenschappen. De stijfheidsmatrix en de scheurstijfheidsmatrix worden afhankelijk gesteld van de temperatuur. De invloed van de temperatuur op de relatie tussen de spanning en de elastische rek is beschreven in hoofdstuk 2.

$$\Delta \sigma = D \left[ \Delta \epsilon - \Delta \epsilon^\theta - \Delta \epsilon^{cr} \right] + \Delta D \epsilon^e \quad (3.8)$$

Voor de relatie tussen de spanning en de scheurrek is dezelfde afleiding van toepassing.

$$\Delta s^{cr} = D^{cr} \Delta \epsilon^{cr} + \Delta D^{cr} \epsilon^{cr} \quad (3.9)$$

Onder invloed van de temperatuur is een thermische rek component toegevoegd aan de totale rekvector. De matrices  $D$  en  $D^{cr}$  zijn de stijfheidsmatrices voor de temperatuur op het tijdstip  $t + \Delta t$ . De additionele term is een correctie op de spanning die de invloed weergeeft van de verandering van de stijfheidsmatrices met de temperatuur.

### 3.1.4 Spannings-rek relatie voor gescheurd beton

Met de gegeven basisvergelijkingen kan nu een relatie worden afgeleid tussen de incrementele spanningsvector en de incrementele totale rekvector. Substitutie van vergelijkingen 3.3 en 3.4 in vergelijking 3.9 geeft de volgende uitdrukking voor de incrementele locale scheurrekvector.

$$D^{cr} \Delta \epsilon^{cr} = N^T \Delta \sigma - \Delta D^{cr} N^{-1} \epsilon^{cr} \quad (3.10)$$

Substitutie van vergelijking 3.8 in vergelijking 3.10 geeft.

$$D^{cr} \Delta \epsilon^{cr} = N^T D \left[ \Delta \epsilon - \Delta \epsilon^\theta - N \Delta \epsilon^{cr} \right] + N^T \Delta D \epsilon^e - \Delta D^{cr} N^{-1} \epsilon^{cr} \quad (3.11)$$

Hiermee kan een uitdrukking worden gevonden voor de incrementele locale scheurrekvector.

$$\Delta \epsilon^{cr} = \left[ D^{cr} + N^T D N \right]^{-1} \left[ N^T D \left[ \Delta \epsilon - \Delta \epsilon^\theta \right] + N^T \Delta D \epsilon^e - \Delta D^{cr} N^{-1} \epsilon^{cr} \right] \quad (3.12)$$

De gezochte constitutieve vergelijking volgt uit het elimineren van de gevonden incrementele locale scheurrekvector uit vergelijking 3.8.

$$\Delta \sigma = \left[ D - D N \left[ D^{cr} + N^T D N \right]^{-1} N^T D \right] \left[ \Delta \epsilon - \Delta \epsilon^\theta + D^{-1} \Delta D \epsilon^e - \left[ N^T D \right]^{-1} \Delta D^{cr} N^{-1} \epsilon^{cr} \right] \quad (3.13)$$

De constitutieve relatie wordt eenvoudiger indien alleen de invloed van de temperatuur op de stijfheidsmatrix van het ongescheurde beton wordt beschouwd.

$$\Delta\sigma = \left[ \mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{N} \left[ \mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{N} \right]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \right] \left[ \Delta\epsilon - \Delta\epsilon^\theta + \mathbf{D}^{-1} \Delta \mathbf{D} \epsilon^e \right] \quad (3.14)$$

Om een beter inzicht in de relatie te verkrijgen wordt het ééndimensionale geval beschouwd. De globale en de lokale coördinaten vallen samen. Loodrecht op de scheur wordt de relatie bepaald door de elasticiteitsmodulus  $E$  van ongescheurd beton en de relatie tussen de spanning loodrecht op de scheur en de scheurrek  $E_{cr}$ .

$$\Delta\sigma_{nn} = E_t \left[ \Delta\epsilon_{nn} - \Delta\epsilon_{nn}^\theta + E^{-1} \Delta E \epsilon_{nn}^e \right] \quad (3.15)$$

met

$$E_t = E \left[ 1 - \frac{E}{E_{cr} + E} \right]$$

Evenwijdig aan de scheur wordt de relatie bepaald door de glijdingsmodulus  $G$  van het ongescheurde beton en de relatie tussen de schuifspanning en de schuifrek in de scheur  $G_{cr}$ .

$$\Delta\sigma_{nt} = \beta G \left[ \Delta\epsilon_{nt} + G^{-1} \Delta G \epsilon_{nt}^e \right] \quad (3.16)$$

met

$$\beta = \left[ 1 - \frac{G}{G_{cr} + G} \right]$$

De totale relatie is opgebouwd uit de relatie tussen de spanning en de elastische rek en de relatie tussen de spanning en de scheurrek. Figuur 3.3 is een grafische weergave van het model bij een constante temperatuur. In de bovenste figuur is de éénassige relatie te zien tussen de trekspanning en de rek loodrecht op de scheur. In de onderste figuur is de éénassige relatie weergegeven tussen de schuifspanning en de rek evenwijdig aan de scheur.

### 3.2 Temperatuurafhankelijke parameters

De materiaalparameters die gelden voor een ongescheurd materiaal spelen ook een rol bij de constitutieve relatie voor een gescheurd materiaal. De temperatuurinvloed op deze parameters is reeds in het vorige hoofdstuk besproken.

Als criterium voor het al dan niet optreden van een scheur wordt de maximale treksterkte  $f_{ct}$  gebruikt. Indien de hoofdtrekspanning deze grens overschrijdt, ontstaat een scheur loodrecht op de richting van deze maximale sterkte.

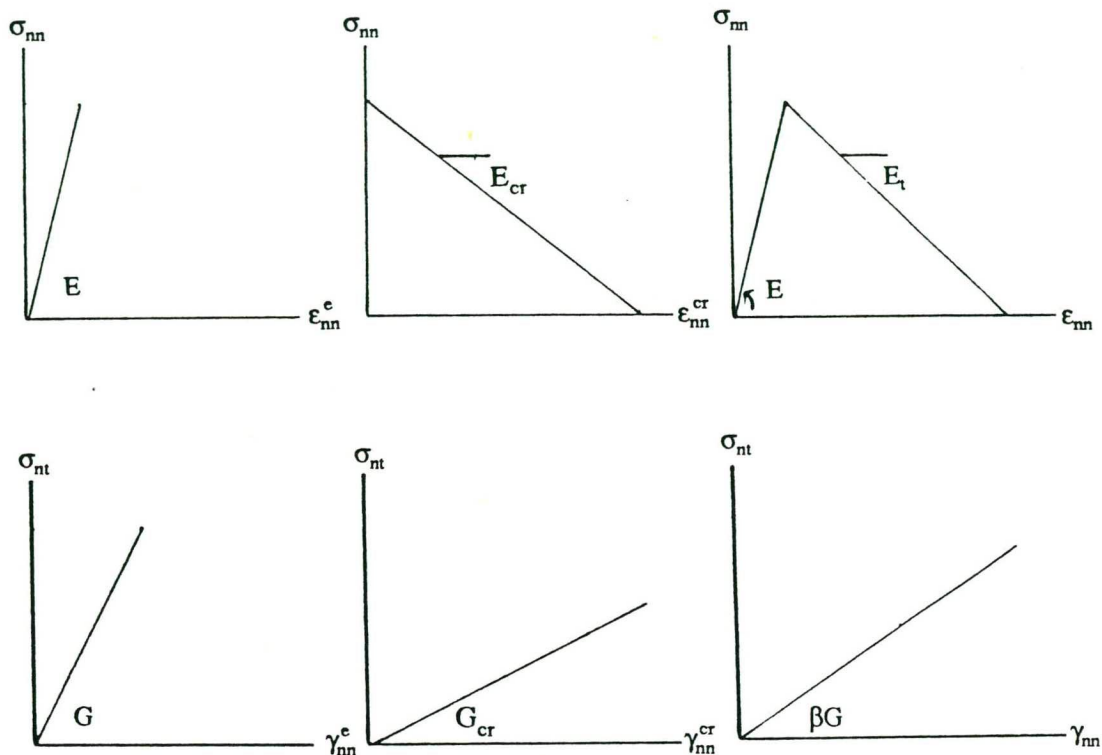
Voor de beschrijving van het softeningsgedrag onder trek wordt onderscheid gemaakt tussen gewapend en ongewapend beton.

#### Ongewapend beton, tension softening model.

In het éénassige spannings-rek diagram is  $\epsilon_u$  de uiterste rek. Deze rek wordt bepaald met behulp



## Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag



figuur 3.3. spannings-rek relaties met scheurvorming.

van de breukenergie  $G_f$ . Deze breukenergie wordt beschouwd als een materiaaleigenschap. Omdat de scheur wordt uitgesmeerd over een bepaald oppervlak is de uiterste rek ook afhankelijk van de scheurband breedte  $h$ .

In het geval van lineaire softening wordt  $\epsilon_u$  weergegeven door de volgende formule (Rots, 1985).

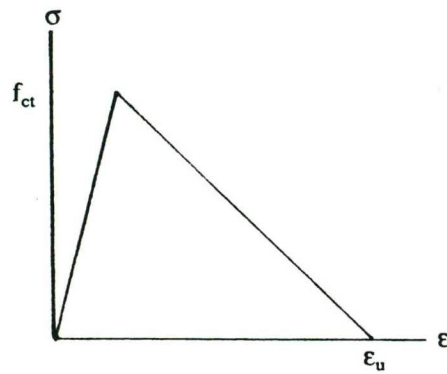
$$\epsilon_u = \frac{2G_f}{f_{ct}h} \quad (3.17)$$

Bovengenoemde theorie wordt grafisch weergegeven voor lineaire softening in figuur 3.4.

### Gewapend beton, tension stiffening model.

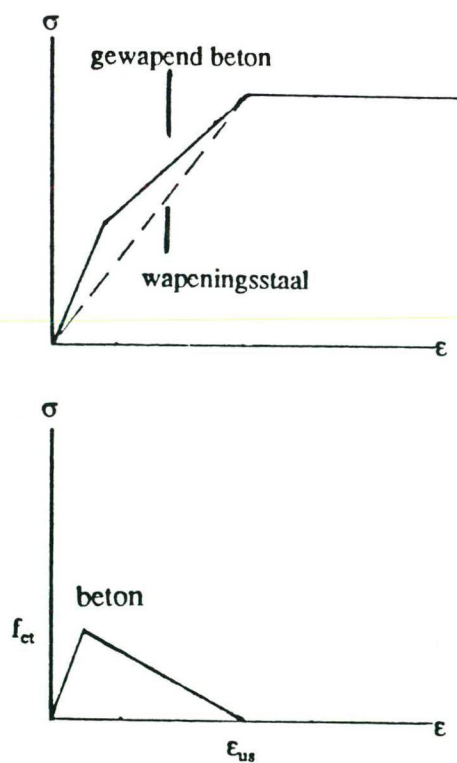
Voor gewapend beton wordt het tension stiffening model gebruikt. Het principe hiervan is uitgebeeld in figuur 3.5. In de figuur is de stijfheid van het staal weergegeven door de stippellijn. De doorgetrokken lijn is de stijfheid van gewapend beton onder trek. Het staal heeft in het laatste geval een hogere stijfheid door de spanningsoverdracht in het gescheurde beton. De schatting voor de uiterste rek van het beton onder trek wordt afgeleid uit de vloeirek van de wapening (de Borst en Rots, 1986).

## Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag



figuur 3.4. tension softening.

$$\epsilon_u = \frac{f_{sy}}{E_s} \quad (3.18)$$



figuur 3.5. tension stiffening.

De dwarskracht die overgebracht kan worden in gescheurd beton is kleiner dan in ongescheurd

## Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

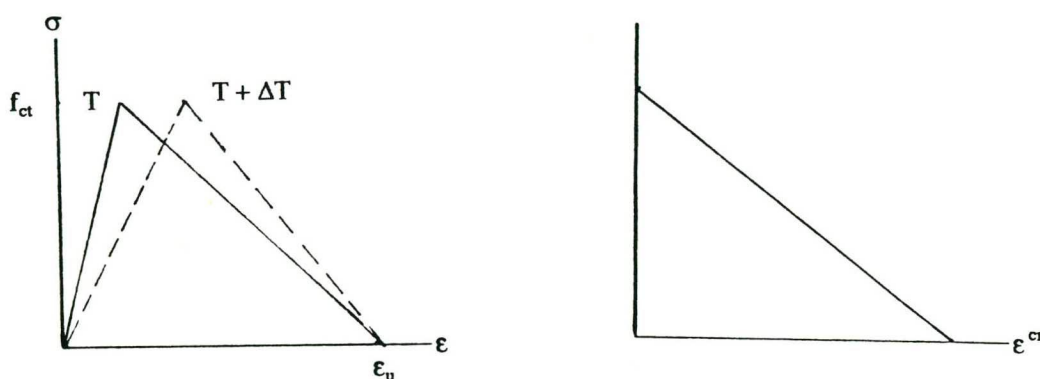
beton. Zowel bij ongewapend als bij gewapend beton wordt deze vermindering in rekening gebracht door de glijdingsmodulus  $G$  te vermenigvuldigen met een dwarskracht reductie factor  $\beta$ . De waarde van  $\beta$  wordt hier gesteld op 0.20.

Nog weinig onderzoek is verricht naar de invloed van de temperatuur op de scheurvormingsparameters. Er wordt aangenomen dat de maximale treksterkte  $f_{ct}$  gerelateerd is aan de maximale druksterkte. De temperatuurafhankelijkheid van de treksterkte kan dan afgeleid worden aan de temperatuurafhankelijkheid van de druksterkte (o.a. Reinhardt, 1979).

Sommige onderzoekers hebben aangetoond dat de breukenergie afneemt bij een toename van de temperatuur (Brameshuber, 1987). De invloed van de temperatuur op de uiterste trekrek kan worden afgeleid uit het verloop van de treksterkte en de breukenergie.

In de figuren 3.6 en 3.7 zijn twee verschillende modellen weergegeven voor de invloed van de temperatuur op de trektaak van het spannings-rek diagram, waarbij de uiterste trekrek constant blijft. In het eerste model heeft de temperatuur geen invloed op de scheurvormingsparameters. In het tweede geval is rekening gehouden met de temperatuurafhankelijkheid van de treksterkte. Bij een constante uiterste trekrek betekent dit ook een invloed van de temperatuur op de breukenergie.

In beide figuren is de invloed van de temperatuur op de elasticiteitsmodulus van beton meegenomen.

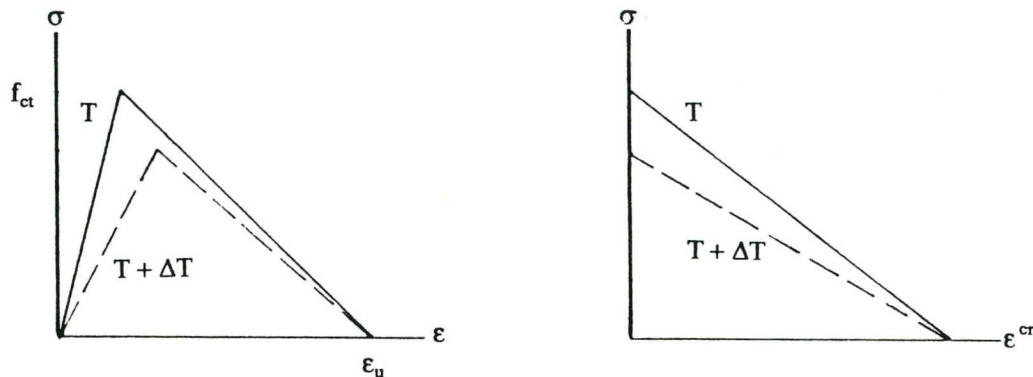


figuur 3.6. spannings-rek relatie met scheurvorming.  
temperatuurinvloed op de elasticiteitsmodulus.

In DIANA is momenteel alleen het model uit figuur 3.6 geïmplementeerd. De bijbehorende constitutieve relatie wordt weergegeven door vergelijking 3.14 uit de vorige paragraaf. Waarschijnlijk benadert het model uit figuur 3.7 de werkelijkheid beter.

In vergelijking met de verandering van de maximale druksterkte en de verandering van de elasticiteitsmodulus zullen de veranderingen van de scheurvormingsparameters een kleine invloed hebben op het totale constructiegedrag. Ook zonder een nauwkeuriger model voor de invloed van de temperatuur op de scheurvorming kunnen relevante numerieke voorspellingen worden gemaakt over het gedrag van een constructie onder invloed van een temperatuurbelasting.





figuur 3.7. spannings-rek relatie met scheurvorming.  
temperatuurinvloed op de elasticiteitsmodulus en de treksterkte.

### 3.3 Testberekeningen

Voor het testen van de combinatie van scheurvorming en temperatuurbelasting zijn de elementen belast tot scheurvorming. Vervolgens zijn tijdstappen genomen waarbij de temperatuur is veranderd. De scheur kan zich gaan sluiten of juist verder open gaan staan. Om beide gevallen te testen is bij alle proeven zowel een temperatuurverhoging als een temperatuurverlaging toegepast. Drie elementen zijn getest, CQ16A, CQ16E en CQ16M.

#### Uitgevoerde testen.

Getest zijn de thermische rek en de invloed van de temperatuur op de elasticiteitsmodulus van beton. Op de laatste test na is de dwarscontractiecoëfficiënt overal gelijk aan nul gesteld. Tabel 3.1 geeft een overzicht van de uitgevoerde testen.

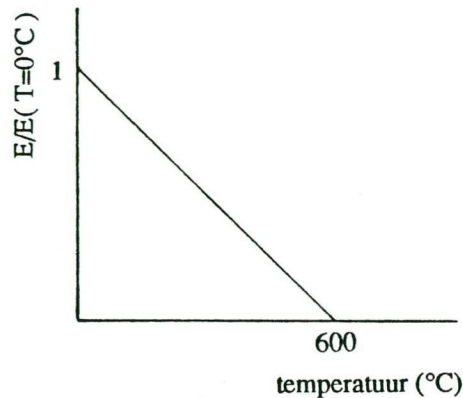
	$\epsilon^\theta$	E (T)	$\nu$
test 1	X		0
test 2		X	0
test 3	X	X	0
test 4		X	0.2

tabel 3.1: één-elementtesten van temperatuurbelasting op gescheurd beton.

#### Uitgewerkte testen: test 3 met het vlakke vervorming element CQ16E.

Een rechthoekig proefstuk wordt aan twee zijden opgesloten (zie figuur 2.2). Aan het proefstuk wordt getrokken tot scheurvorming optreedt. Vervolgens wordt de temperatuur uniform verhoogd. Het materiaal heeft een constante uitzettingscoëfficiënt. De elasticiteitsmodulus is een functie van de temperatuur (figuur 3.8). Door het verhogen van de temperatuur zet het materiaal uit. De scheurrek neemt af en de scheur gaat zich sluiten. Indien de thermische rek gelijk is aan de opgelegde rek is de scheur volledig gesloten. De scheurrek en de elastische rek

## Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag



figuur 3.8. de E-modulus als functie van de temperatuur.

zijn beiden nul en de constructie is spanningsloos. Bij verdere toename van de temperatuur komt de constructie onder drukspanning te staan. In de constitutieve relatie wordt de temperatuurafhankelijke lineair elastische E-modulus gebruikt.

### Analytische oplossing.

Voor aanvang van de temperatuurverhoging aan het proefstuk getrokken tot een rek van  $0.3 \cdot 10^{-3}$  is opgetreden. De totale rek behoudt deze waarde gedurende de temperatuurbelasting. De oplossing voor de spanning is afhankelijk van de scheurstatus. Bij een temperatuur groter dan  $25^\circ\text{C}$  is de scheur volledig gesloten en komt het beton onder druk te staan.

$$\text{trek gebied } T < 25 \quad \sigma = (0.3 \cdot 10^{-3} - \alpha T) \frac{E^* E^{\text{cr}}}{E + E^{\text{cr}}}$$

$$\text{druk gebied } T > 25 \quad \sigma = (0.3 \cdot 10^{-3} - \alpha T) E$$

Voor de parameters op de aanvangstemperatuur zijn de volgende waarden genomen.

$$E^{\text{cr}} = 3750 \text{ N/mm}^2$$

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$E^0 = 30000 \text{ N/mm}^2$$

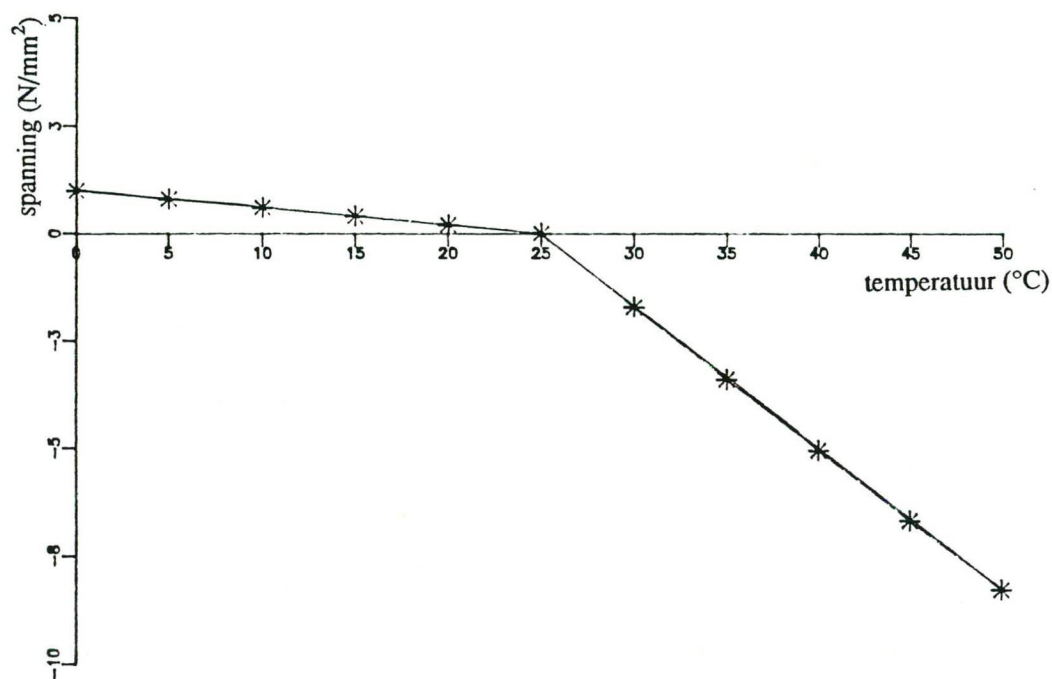
De E-modulus is een functie van de temperatuur.

$$E = E^0 \frac{600 - T}{600}$$

De numerieke waarden voor de analytische oplossing zijn numeriek bepaald door de temperatuurafhankelijke identiteiten te substitueren in de functie voor de spanning.

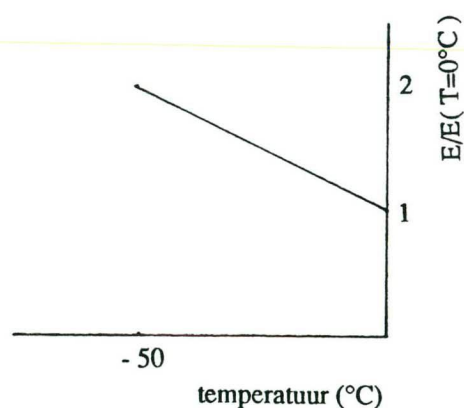
### Resultaten.

De numerieke resultaten beschrijven het gebruikte model exact (figuur 3.9).



figuur 3.9. spannings-temperatuur diagram.

Hetzelfde proefstuk wordt nu spanningsloos ingesloten. Om de invloed van de temperatuur op de lineair elastische E-modulus duidelijker te laten zien wordt een geprononceerd verloop van de E-modulus met de temperatuur opgegeven (figuur 3.10).



figuur 3.10. de E-modulus als functie van de temperatuur.

De temperatuur wordt uniform over het proefstuk verlaagd. Door het inkrimpen van het proefstuk gaat de scheur verder open staan. Indien de thermische rek de waarde van de maximale trekrek heeft bereikt staat de scheur volledig open en kan het beton geen spanning loodrecht op de scheur meer overbrengen.

## Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

### *Analytische oplossing.*

De oplossing voor de spanning wordt opgedeeld in drie deelgebieden. Totdat de maximale trekspanning is bereikt geldt de oplossing voor ongescheurd beton. Na het bereiken van de maximale trekspanning geldt de oplossing voor een opengaande scheur. Indien de maximale trekrek is bereikt gaat de scheur verder openstaan terwijl de spanning nul blijft.

$$\text{ongescheurd gebied} \quad \sigma = -E\alpha T$$

$$\text{gescheurd gebied} \quad T > -33.3 \quad \sigma = (-0.4 \cdot 10^{-3} - \alpha T) \frac{E^* E^{cr}}{E + E^{cr}}$$

$$\text{gescheurd gebied} \quad T < -33.3 \quad \sigma = 0.0$$

Voor de parameters op de aanvangstemperatuur zijn de volgende waarden genomen.

$$E^{cr} = -7500 \text{ N/mm}^2$$

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$E^0 = 30000 \text{ N/mm}^2$$

De E-modulus is een functie van de temperatuur.

$$E = E^0 \frac{25 - T}{25}$$

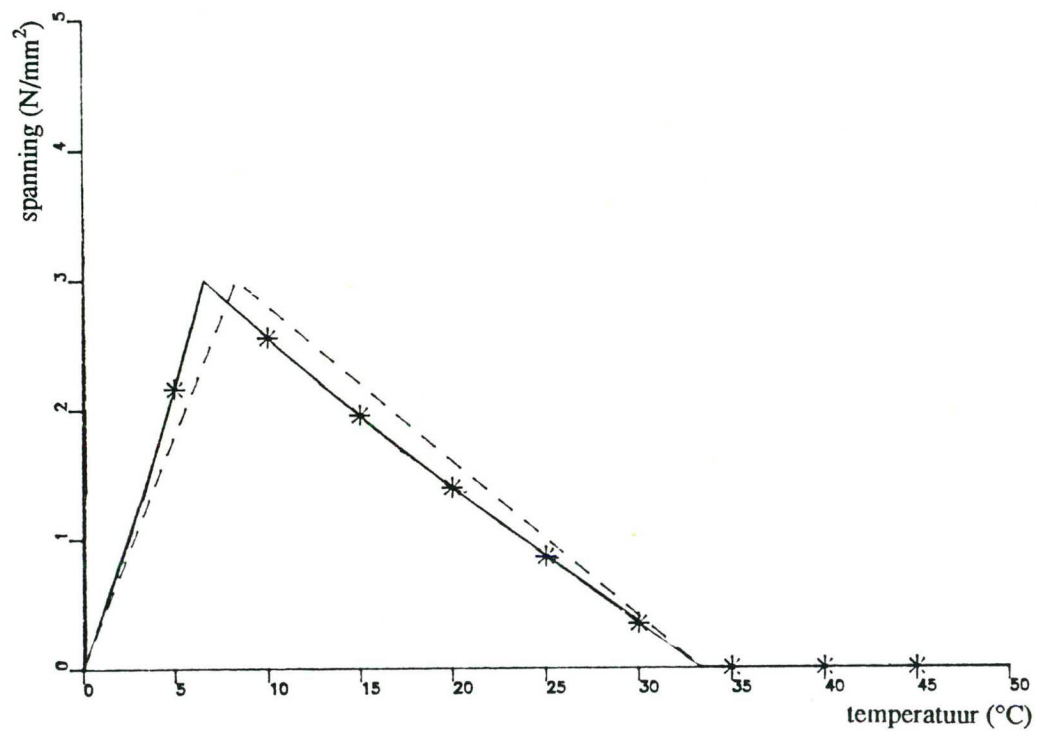
De numerieke waarden voor de analytische oplossing zijn numeriek bepaald door de temperatuurafhankelijke identiteiten te substitueren in de functie voor de spanning.

### *Resultaten.*

In figuur 3.11 zijn de analytische en numerieke resultaten weergegeven. De stippellijn geeft het verloop van de spanning weer indien de E-modulus niet afhankelijk wordt gesteld van de temperatuur. De verandering van de E-modulus met de temperatuur heeft weinig invloed op het gedrag van de constructie. De scheur staat bij kleine verlaging van de temperatuur reeds volledig open.



## Scheurvorming met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag



figuur 3.11. spannings-temperatuur diagram.



## 4. Plasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

### 4.1 Constitutieve vergelijking

Als criterium voor plasticiteit wordt een vloeifunctie of vloeicriterium gebruikt. Dit criterium is een functie van de spanning  $\sigma$ , de hardenings parameter  $k$  en de temperatuur  $\theta$ .

$$f = f(\sigma, k, \theta) \quad (4.1)$$

De situatie is elastisch indien de functiewaarde kleiner is dan nul. Bij een waarde van  $f$  gelijk aan nul is de situatie plastisch.

De plastische reksnelheid  $\dot{\epsilon}^{pl}$  wordt afgeleid uit de plastische potentiaal  $g$ .

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (4.2)$$

De afgeleide van de plastische potentiaal naar de spanning bepaalt de richting van het plastische rek, de niet-negatieve scalar  $\lambda$  bepaalt de grootte.

Normaliteit houdt in dat de plastische rekken loodrecht op het vloeiooppervlak staan. Indien normaliteit optreedt is de functie  $g$  dezelfde als de vloeifunctie  $f$ . Er wordt gesproken van geassocieerde vloeit. Hier wordt de constitutieve vergelijking afgeleid voor niet-geassocieerde vloeit.

De relatie tussen de spanning en de elastische rek is uitgangspunt van de constitutieve vergelijking.

$$\dot{\sigma} = D\dot{\epsilon}^e + \dot{D}\epsilon^e \quad (4.3)$$

In dit geval bestaat de totale reksnelheid uit een elastische, een thermische, en een plastische component.

$$\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^\theta - \dot{\epsilon}^{pl} \quad (4.4)$$

De relaties voor de elastische rek en de thermische rek zijn in de vorige hoofdstukken besproken. Voor het uitwerken van de constitutieve relatie moet de waarde van de scalar  $\lambda$  bepaald worden.

Invullen van vergelijkingen 4.2 en 4.4 in vergelijking 4.3 geeft de volgende spannings-rek relatie.

$$\dot{\sigma} = D \left[ \dot{\epsilon} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \dot{\epsilon}^\theta \right] + \dot{D}\epsilon^e \quad (4.5)$$

De spanning moet tijdens belasting op het vloeiooppervlak blijven. De afgeleide van de vloeifunctie wordt gelijk gesteld aan nul.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon^{pl}} \dot{\epsilon}^{pl} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} = 0 \quad (4.6)$$

## Plasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

Met de gevonden uitdrukkingen is het mogelijk de grootte van de scalar  $\lambda$  te bepalen.

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \left( \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^\theta \right) + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\mathbf{D}} \boldsymbol{\epsilon}^e + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta}}{-\frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k^T}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (4.7)$$

Elimineren van  $\lambda$  geeft de constitutieve relatie, uitgedrukt in snelheden.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = & \left[ \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D}}{h + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \right] \left( \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^\theta \right) \\ & + \left[ \dot{\mathbf{D}} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\mathbf{D}}}{h + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \right] \left( \boldsymbol{\epsilon}^e \right) - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta}}{h + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

met

$$h = -\frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (4.9)$$

De matrix  $\mathbf{D}$  is de stijfheidsmatrix voor de temperatuur op tijdstip  $t + \Delta t$ . De tweede term van de vergelijking geeft de invloed weer van de verandering van de elastische eigenschappen met de temperatuur. De derde term geeft de invloed weer van de verandering van het vloeiooppervlak met de temperatuur.

De correctieterm op de incrementele spanningstensor die ontstaat als gevolg van de verandering van de stijfheidsmatrix wordt voorvermenigvuldigd met de compliantiematrix. Er ontstaat een 'verborgen rek'. Samen met de incrementele elastische rektensor wordt deze verborgen rek opgeslagen in een incrementele rektensor.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^h = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^\theta + \mathbf{D}^{-1} \dot{\mathbf{D}} \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (4.10)$$

De constitutieve relatie voor plasticiteit kan dan overzichtelijker worden weergegeven.



$$\dot{\sigma} = \left[ \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D}}{h + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \right] \left[ \dot{\epsilon}^h \right] - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta}}{h + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (4.11)$$

#### Impliciet integratie schema.

Bij de numerieke behandeling van de constitutieve relatie maakt DIANA gebruik van een impliciete integratie methode (de Borst, 1984b).

Bij een expliciete methode wordt alleen gebruik gemaakt van gegevens aan het begin van een belastingstap. Een impliciete methode bepaalt de plastische rek met behulp van een schatting van de nieuwe spanning.

Bij aanvang van de berekening wordt een testspanning  $\sigma^t$  bepaald.

$$\sigma^t = \sigma^0 + \mathbf{D} \left[ \Delta \epsilon - \Delta \epsilon^\theta \right] + \Delta \mathbf{D} \epsilon^e \quad (4.12)$$

Invullen van deze testspanning in de vloeifunctie bepaalt of de situatie voor het gegeven punt elastisch of plastisch is. In geval van plasticiteit vindt een correctie plaats om de spanning terug te brengen op het vloeiooppervlak,  $f(\sigma^1) = 0$ . Het plastische rek increment volgt dan uit de volgende vergelijking.

$$\Delta \epsilon^{pl} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \Delta \epsilon - \Delta \epsilon^e - \Delta \epsilon^\theta = \mathbf{D}^{-1} \left[ \sigma^1 - \sigma^t \right] \quad (4.13)$$

De uiteindelijke spanning volgt uit de correctie op de testspanning.

$$\sigma^1 = \sigma^t - \lambda \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (4.14)$$

De waarde voor  $\lambda$  volgt uit de voorwaarde voor de vloeifunctie.

$$f \left( \sigma^t - \lambda \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}, k, \theta \right) = 0 \quad (4.15)$$

De waarde voor  $\lambda$  kan bepaald worden op een iteratieve wijze. In DIANA wordt de vloeifunctie ontwikkeld in een Taylor serie rond  $\sigma = \sigma^t$ ,  $k = k$ ,  $\theta = \theta^1$ . Verwaarlozing van de tweede en hogere orde termen levert de volgende voorwaarde.

$$f(\sigma^t, k, \theta) - \lambda \left[ \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} + h \right] = 0 \quad (4.16)$$

Elimineren van  $\lambda$  geeft de incrementele constitutieve relatie.

## Plasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

$$\Delta\sigma = D \left[ \Delta\epsilon - \Delta\epsilon^{\theta} \right] + \Delta D \epsilon^e - \frac{f(\sigma^l, k, \theta) D \frac{\partial g}{\partial \sigma}}{h + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} D \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (4.17)$$

Gebuiik maken van  $\Delta\epsilon^h$  geeft een verkorte schrijfwijze.

$$\Delta\sigma = D \left[ \Delta\epsilon^h \right] - \frac{f(\sigma^l, k, \theta) D \frac{\partial g}{\partial \sigma}}{h + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} D \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (4.18)$$

Bij de impliciete methode is de verandering van het vloeiooppervlak met de temperatuur verwerkt in de vloeifunctie. Indien de vloeifuncties lineair zijn in de hoofdspansingen wordt de spanning volgens de impliciete methode exact teruggebracht op het vloeiooppervlak. Dit geldt in het algemeen niet voor vloeifuncties die deze eigenschappen niet bezitten. Enkele belangrijke vloeicriteria, zoals de von Mises en Drucker-Prager criteria, kunnen echter in een vorm geschreven worden waarbij de tweede en hogere orde termen verdwijnen. Het is dan ook voor deze vloeifuncties mogelijk om de spanning rigoreus terug te brengen op het vloeiooppervlak (de Borst, 1984b).

De impliciete methode is in wezen een Euler backward integratie schema.

In figuur 4.1 wordt de éénassige spannings-rek relatie grafisch weergegeven. De totale relatie is opgebouwd uit de relatie tussen de spanning en de elastische rek en de relatie tussen de spanning en de plastische rek. De versteviging is lineair afhankelijk gesteld van de plastische rek. Voor dit één dimensionale geval zijn een aantal vereenvoudigingen toegepast. Voor de hardeningsparameter  $H$  en de tangentstijfheid  $E_t$  in het plastische gebied gelden hier de volgende relaties.

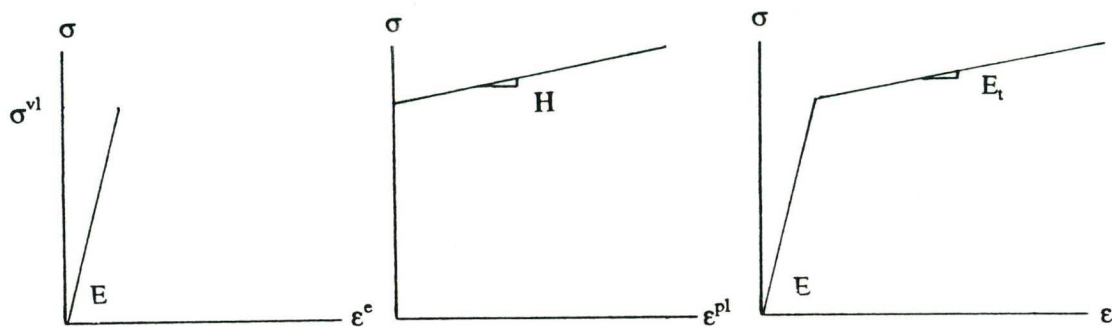
$$H = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon^{pl}}$$

$$E_t = E \left[ 1 - \frac{E}{H + E} \right]$$

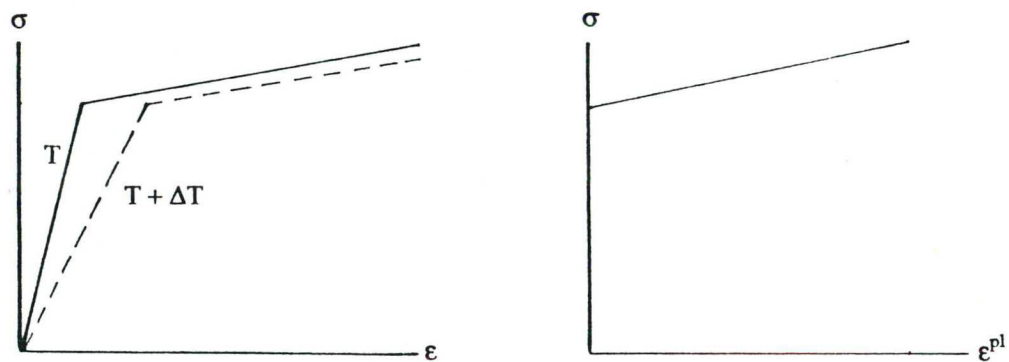
In de figuur 4.1. is te zien dat de totale relatie is opgebouwd uit de relatie tussen de spanning en de elastische rek en de relatie tussen de spanning en de plastische rek.

### 4.2 Temperatuurafhankelijke parameters

De éénassige ideaal-plastische spannings-rek relatie wordt beschreven met twee materiaalparameters, de elasticiteitsmodulus en de vloeispanning. Voor een plastisch model met versteviging wordt een hardeningsparameter gebruikt. Deze parameter is een functie van de plastische rek. Naast de elasticiteitsmodulus kunnen ook de vloeispanning en de hardeningsparameter een functie zijn van de temperatuur. In de figuren 4.2 en 4.3 is grafisch weergegeven welke

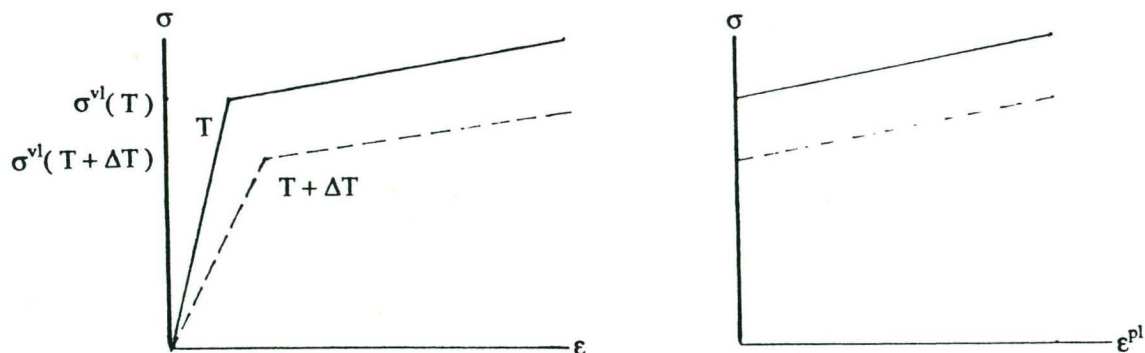


figuur 4.1. éénassige spannings-rek relatie met plasticiteit.



figuur 4.2. spannings-rek relatie met plasticiteit.  
invloed van de temperatuur op de E-modulus.

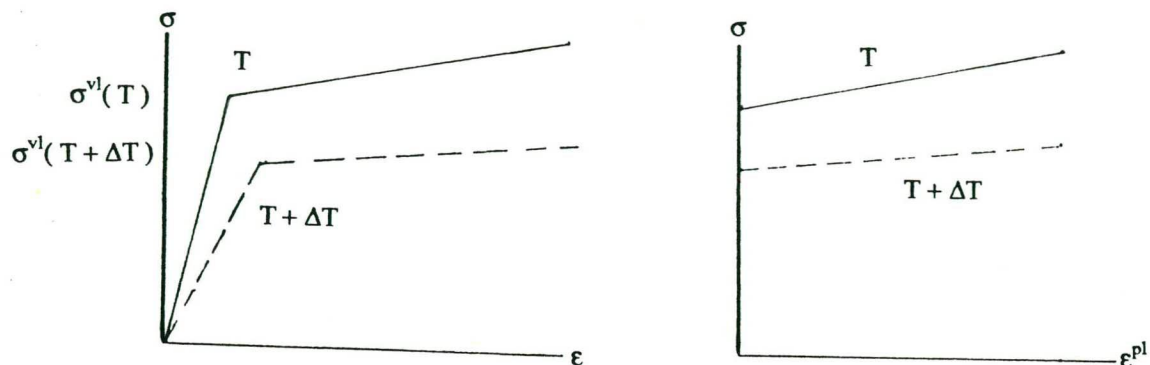
invloed de verandering van de verschillende parameters heeft op de spannings-rek relatie.



figuur 4.3. spannings-rek relatie met plasticiteit.  
invloed van de temperatuur op de E-modulus en de vloeispanning.



## Plasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag



figuur 4.4. spannings-rek relatie met plasticiteit.

invloed van de temperatuur op de E-modulus, de vloeispanning en de hardening.

Over de spannings-rek relatie van beton onder druk bij verschillende temperaturen is in de literatuur uitgebreide informatie te vinden. Ook de spannings-rek relatie van staal bij verschillende temperaturen is uitvoerig beschreven in de literatuur. Uit de experimenten volgt dat een model rekening moet houden met de invloed van de temperatuur op de elasticiteitsmodulus en de vloeispanning om de gevonden spannings-rek relaties redelijk te kunnen beschrijven. In een model met versteviging is de invloed van de temperatuur op de versteviging minder evident. In DIANA is het model uit figuur 4.3 geïmplementeerd. Geen rekening wordt gehouden met de invloed van de temperatuur op de hardeningsparameter.

Bij de beschouwing van een meerassige spanningstoestand wordt gebruik gemaakt van een vloeicriterium. Er zijn vele vloeicriteria in omloop. In DIANA zijn momenteel vier verschillende vloeicriteria beschikbaar.

1. Tresca.
2. Von Mises.
3. Mohr-Coulomb.
4. Drucker-Prager.

De criteria van Tresca en Von Mises worden beschreven met één parameter, de éénassige vloeispanning. De omzetting van de invloed van de temperatuur op de éénassige vloeispanning naar de invloed van de temperatuur op het gebruikte model levert hier geen problemen op. De andere twee modellen, Mohr-Coulomb en Drucker-Prager, die vaak toegepast worden bij de modellering van beton, worden beschreven met twee parameters. Voor deze parameters worden in beide gevallen de cohesie  $c$  en de wrijvingshoek  $\phi$  genomen. De invloed van de temperatuur op de éénassige spannings-rek relatie verschaft niet voldoende informatie voor het bepalen van de invloed van de temperatuur op de parameters van de modellen. Het is momenteel in DIANA alleen mogelijk om de cohesie op te geven als functie van de temperatuur.



### 4.3 Testberekeningen

De testberekeningen zijn gemaakt met de vloeicriteria van Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb, en Drucker-Prager. De E-modulus en een parameter van de vloeicriteria zijn afhankelijk gesteld van de temperatuur. Alle gemaakte testen zijn analytisch te berekenen.

**Uitgevoerde testberekeningen.**

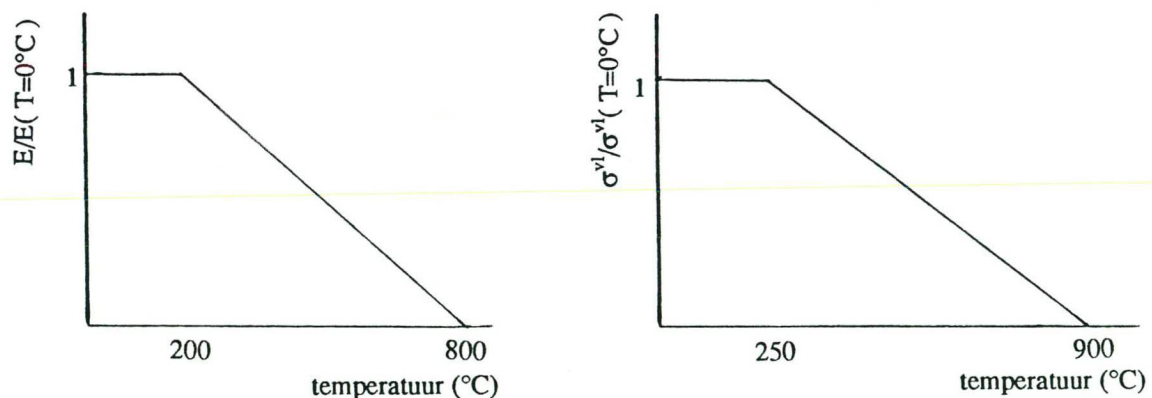
*In tabel 4.1 is een overzicht gegeven van de uitgevoerde testberekeningen.*

	$\alpha$	$\sigma^{vl}(T)$	$E(T)$	$h$
test 1	X	X		
test 2		X	X	
test 3	X	X	X	X

tabel 4.1: één elementtesten op isotroop elastisch-plastisch materiaal

**Uitgewerkte testberekening: test 3 met het volume element CHX60.**

Het element wordt in een richting aan twee zijden ingeklemd. In de overige twee richtingen kan het proefstuk vrij vervormen. De belasting bestaat uit een uniforme verhoging van de temperatuur. Zowel de vloeispanning als de E-modulus zijn afhankelijk van de temperatuur.



figuur 4.5. de materiaaleigenschappen als functie van de temperatuur.

In het begin neemt de spanning in de constructie lineair toe met de temperatuur als gevolg van de verhinderde vervorming. Bij een temperatuur van 198°C gaat het materiaal vloeien. Als gevolg van de hardening loopt de spanning licht op. Bij verdere verwarming neemt eerst de elasticiteitsmodulus af en later ook de vloeispanning. De spanning in het materiaal daalt tot nul bij 800°C.

*Analytische oplossing.*

Met behulp van een vloeifunctie  $f$  wordt bepaald of de spanning zich bevindt in het elastische of het plastische gebied. De oplossing voor de spanning is afhankelijk van de waarde van de

## Plasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag

vloeifunctie  $f(\sigma) = \sigma - \sigma^{vl}$ .

elastisch gebied  $f(\sigma) < 0$   $\sigma = -\alpha T$

plastisch gebied  $f(\sigma) = 0$   $\sigma = -\frac{E^*H}{E+H} \left( \alpha T + \frac{\sigma^{vl}}{H} \right)$

Voor de parameters op de aanvangstemperatuur zijn de volgende waarden genomen.

$$H = 0.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$E^0 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma^{vl0} = 500 \text{ N/mm}^2$$

De temperatuurafhankelijkheidsrelaties zijn de volgende.

$$0 < T < 200 \quad E = E^0 \quad 200 < T < 800 \quad E = E^0 \frac{800 - T}{600}$$

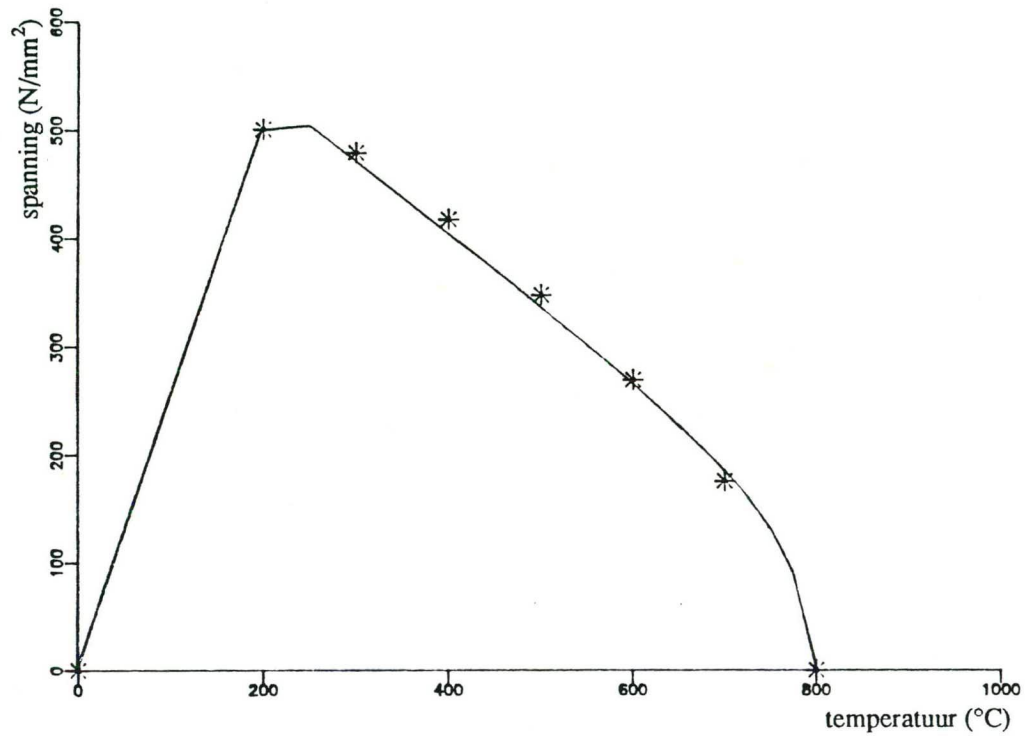
$$0 < T < 250 \quad \sigma^{vl} = \sigma^{vl0} \quad 250 < T < 900 \quad \sigma^{vl} = \sigma^{vl0} \frac{900 - T}{650}$$

De numerieke waarden voor de analytische oplossing zijn numeriek bepaald door de temperatuurafhankelijke identiteiten te substitueren in de functie voor de spanning. Getest wordt of de elastische of plastische relatie aangewend moet worden.

### Resultaten.

De numerieke oplossing benadert de analytische oplossing (figuur 4.6). Bij een kleinere stapgrootte is de oplossing nauwkeuriger. Zonder versteviging is de numerieke oplossing wel exact. Bij gebruik van de hardening moet echter een schatting worden gemaakt van de nieuwe vloeisterkte zodat de nauwkeurigheid van de oplossing afhankelijk wordt van de stapgrootte.

## Plasticiteit met temperatuurafhankelijk materiaalgedrag



figuur 4.6. spannings-temperatuur diagram.





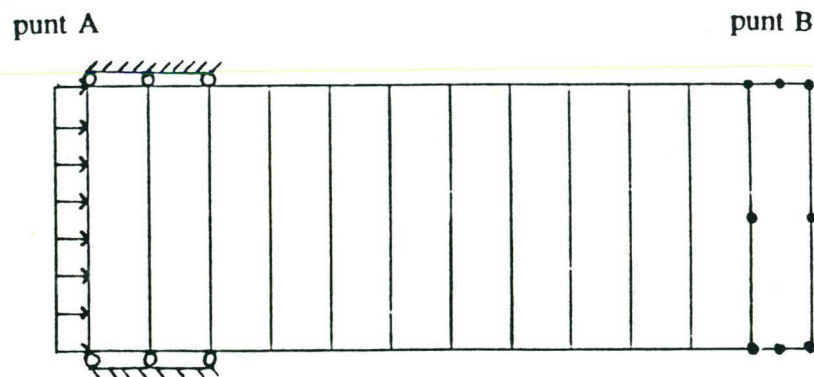
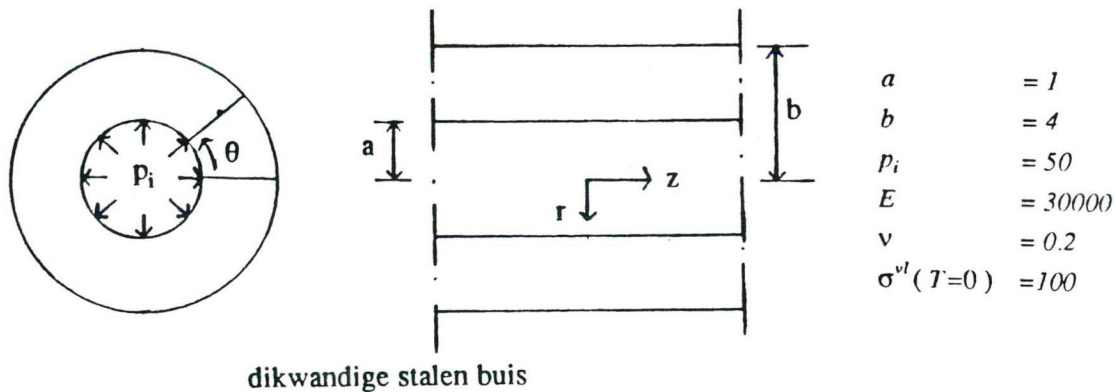
## 5. Twee test gevallen

### 5.1 Dikwandige stalen buis

Doel van deze exercitie is het testen van de invloed van de temperatuur op de vloeispanning bij een stalen constructie. Naast een numerieke berekening wordt een sluitende analytisch oplossing gegeven.

#### 5.1.1 Constructie gegevens

Een dikwandige stalen buis wordt belast door een inwendige overdruk  $p_i$ . De buis wordt oneindig lang verondersteld zodat er een vlakke vervormings toestand aanwezig is. Zowel de geometrie als de belasting zijn axiaalsymmetrisch. Belasting op de buitenkant van de buis wordt niet in de beschouwing meegenomen, hoewel dit geen essentiële voorwaarde is voor het verkrijgen van een analytische oplossing.



figuur 5.1. dikwandige buis en elementennet.

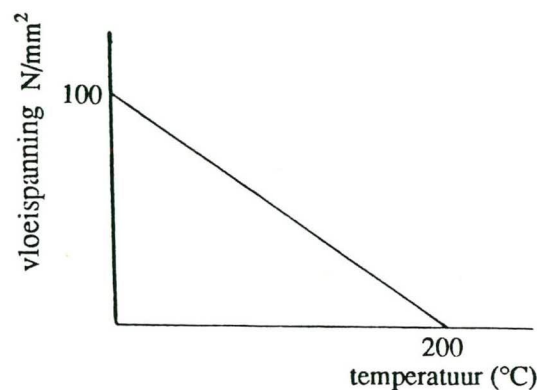
Het elementenmodel bestaat uit 12 axiaalsymmetrische elementen CQ16A (figuur 5.1). Met dit aantal elementen is een zeer nauwkeurige oplossing te verkrijgen. De analytische oplossing is niet exact te beschrijven met een tweede graads polynoom, zoals gebruikt wordt door het toegepaste element. De oplossing is wel zeer nauwkeurig te benaderen met een dergelijk polynoom.

## Dikwandige stalen buis

Velen hebben reeds analytisch gerekend aan het probleem van de dikwandige buis (Koiter, 1953). Ook voor elementen berekeningen wordt deze buis vaak gebruikt als testprobleem.

### 5.1.2 Temperatuur belasting

Bij een inwendige overdruk ontstaat een spanning in  $r$ -richting die van binnen naar buiten afloopt. Na het aanbrengen van de overdruk wordt de temperatuur gelijkmatig over de hele buis verhoogd. Naast een thermische uitzetting veranderen de materiaaleigenschappen. In deze berekening is alleen de vloeispanning afhankelijk gesteld van de temperatuur. Het vloeicriterium van Tresca is gebruikt. De temperatuurafhankelijke parameter is hier de éénassige vloeispanning (figuur 5.2).



*figuur 5.2. vloeispanning als functie van de temperatuur.*

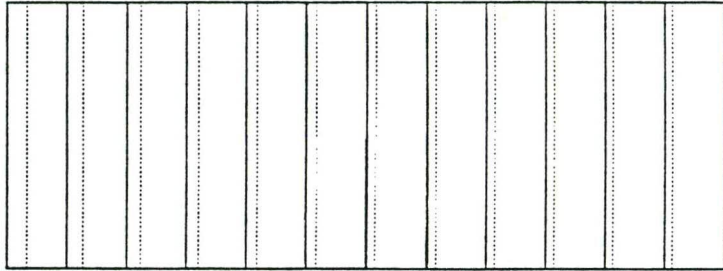
Door het oplopen van de temperatuur zet de constructie uit. De buis kan in de  $r$ - en de  $\theta$ -richting vrij vervormen (zie bijlage 1). Alleen de vervorming in  $z$ -richting wordt tegengegaan zodat hier een extra spanning ontstaat. Als gevolg van het afnemen van de vloeispanning bereikt de spanning in de buis op een gegeven moment aan de binnenkant de vloeigrens. Door verdere verhoging van de temperatuur schuift de grens tussen plasticiteit en elasticiteit op naar buiten. Als deze grens de buitenkant van de buis heeft bereikt vervormt de constructie zonder verdere verhoging van de belasting. De buis kan geen hogere temperatuur verdragen en bezwijkt.

De thermisch uitzetting beïnvloedt de waarde van de spanning in  $r$ - en in  $\theta$ -richting niet. Doel van de berekening is het testen van de temperatuurafhankelijkheid van de vloeispanning. Daarom is de thermische uitzettingscoëfficiënt in de berekening buiten beschouwing gelaten.

### 5.1.3 Resultaten

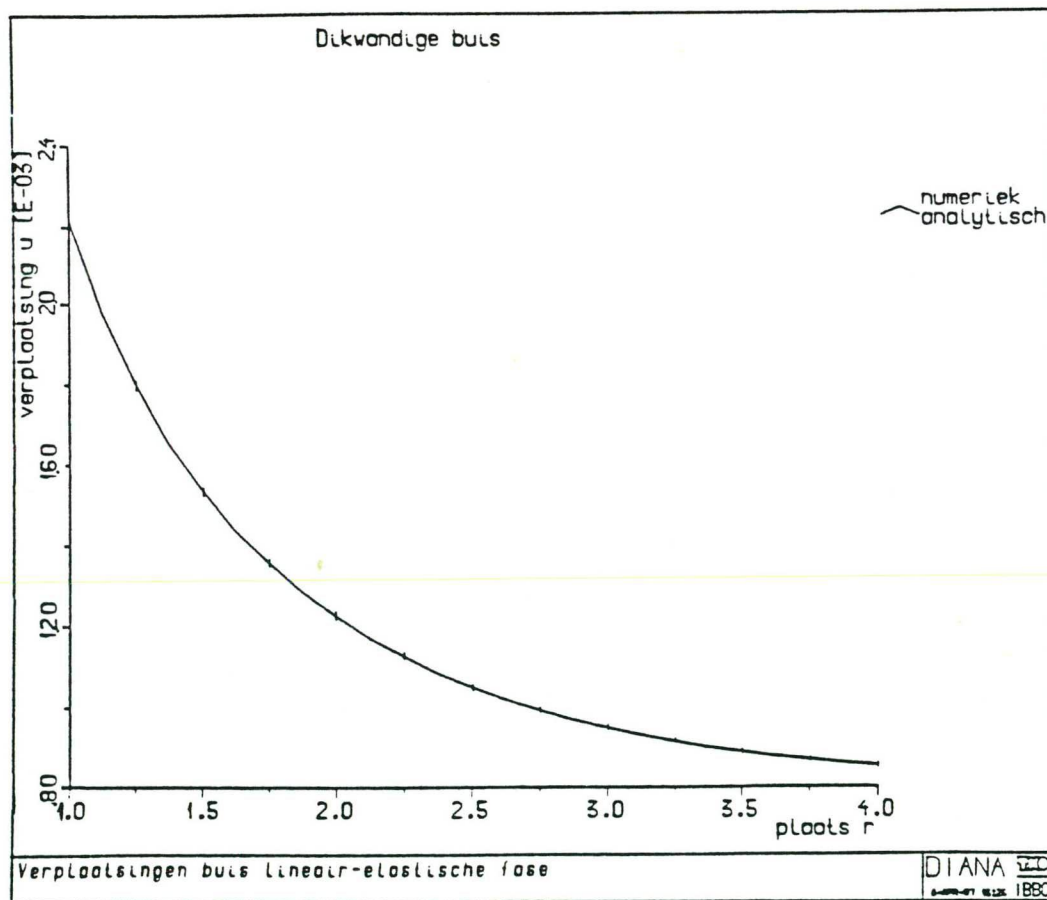
De analytische berekening is uitgewerkt in bijlage 1 en 2. Voordat de temperatuurbelasting wordt aangebracht, zet de buis uit. De verplaatsing aan de binnenkant is groter dan de verplaatsing aan de buitenkant van de buis. Dit is bij de numerieke berekening ook het geval zoals te zien valt in figuur 5.3.

De verplaatsingen over een doorsnede van de buis zijn in de figuur 5.4 weergegeven. Er zijn geen verschillen te zien tussen de analytische en de numerieke berekening. Bij nader onderzoek bleek deze grote nauwkeurigheid ook op te treden bij het gebruik van twee elementen over de dikte van de buis. Het gebruikte tweedegraads polynoom kan de functie van de verplaatsingen



figuur 5.3. numeriek berekende vervormingen bij overdruk.

zeer nauwkeurig beschrijven.



figuur 5.4. verplaatsing in r-richting bij overdruk.

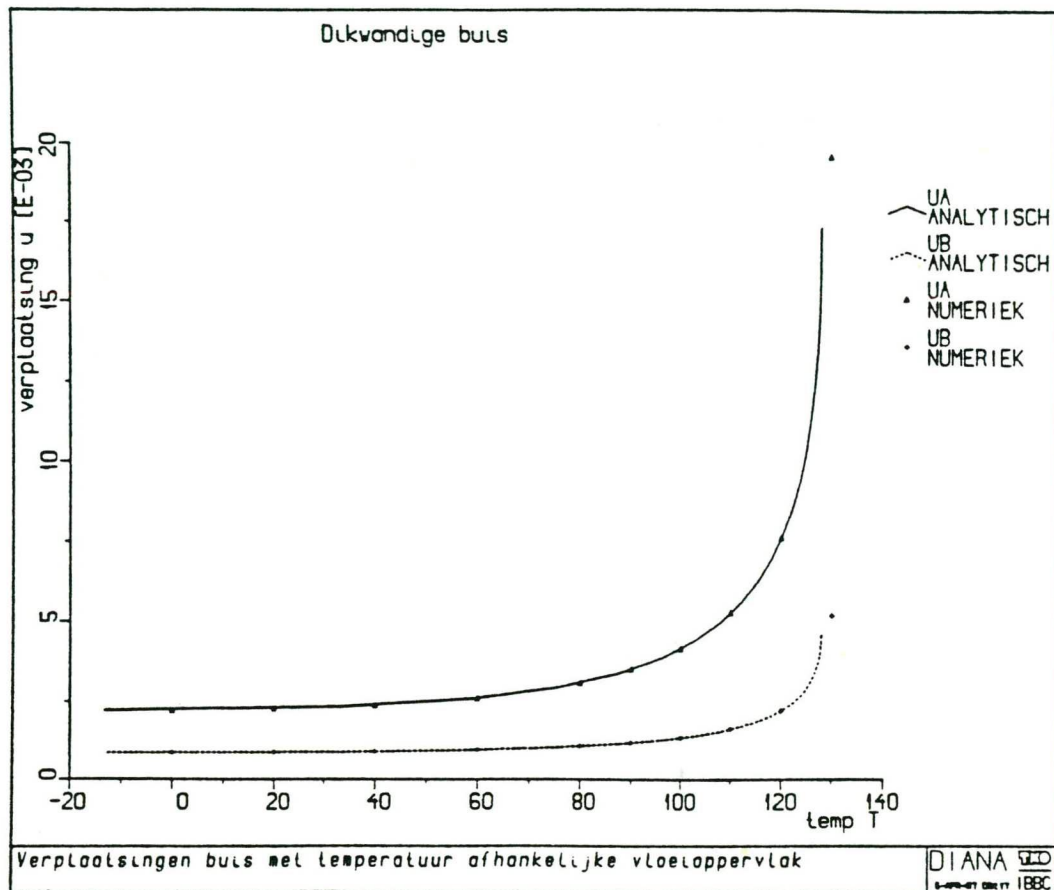
Na het aanbrengen van de overdruk wordt de buis uniform in temperatuur verhoogd. Vrij snel na aanvang van het verwarmen treedt vloeien op als gevolg van de daling van de vloeispanning. De verplaatsingen in r-richting op punt A aan de binnenkant van de buis en op punt B aan de buitenkant van de buis zijn zowel analytisch als numeriek berekend (figuur 5.5).

De elementen berekening volgt de exacte analytisch oplossing zeer nauwkeurig, onafhankelijk van de stapgrootte. Alleen in het gebied rond de bezwijktemperatuur ontstaan



## Dikwandige stalen buis

covergentieproblemen. Vlak voor het bereiken van de bezwijktemperatuur lopen de vervormingen zeer snel op. Om de exacte bezwijktemperatuur te verkrijgen moeten zeer kleine tijdstappen worden genomen. Indien voor de temperatuur een waarde wordt opgegeven die hoger ligt dan de bezwijktemperatuur wordt geen convergentie meer verkregen. Het is uit oogpunt van convergentie beter om de proef verplaatsingsgestuurd uit te voeren. Een temperatuurbelasting vindt echter altijd belastinggestuurd plaats. Onderzoeken van het vervormingsgedrag na bezwijken is dan niet mogelijk.



figuur 5.5. verplaatsing in r-richting bij overdruk en temperatuurverhoging.

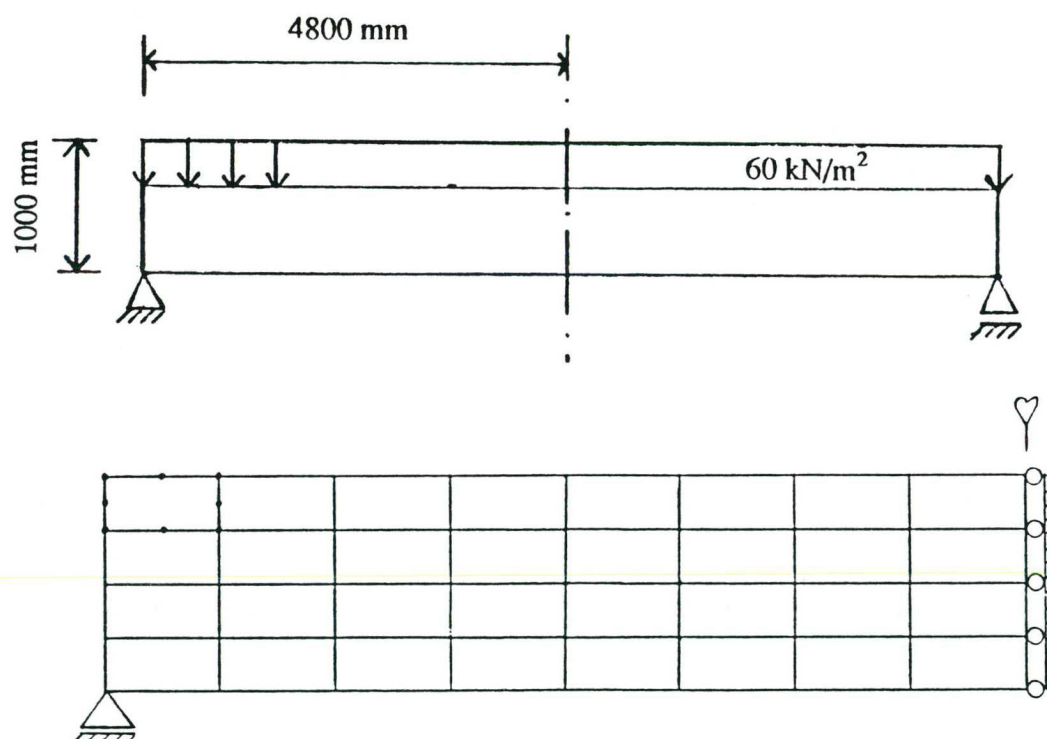


## 5.2 Statisch bepaalde betonnen ligger

Het doel van de volgende berekening is het testen van de respons van een gewapend betonnen constructie op temperatuurbelasting. De constructie wordt zodanig beschouwd dat naast een numerieke berekening ook een analytische berekening mogelijk is.

### 5.2.1 Constructie gegevens

Een statisch bepaald opgelegde balk in gewapend beton wordt belast door een gelijkmatig verdeelde belasting. In het gebruiksstadium heeft de middendoorsnede van de balk een veiligheid  $\gamma = 1,8$  ten opzichte van de bezwijkbelasting. De afmetingen van de balk en het gebruikte elementennet zijn gegeven in figuur 5.6, de doorsnedegegevens in figuur 5.7.



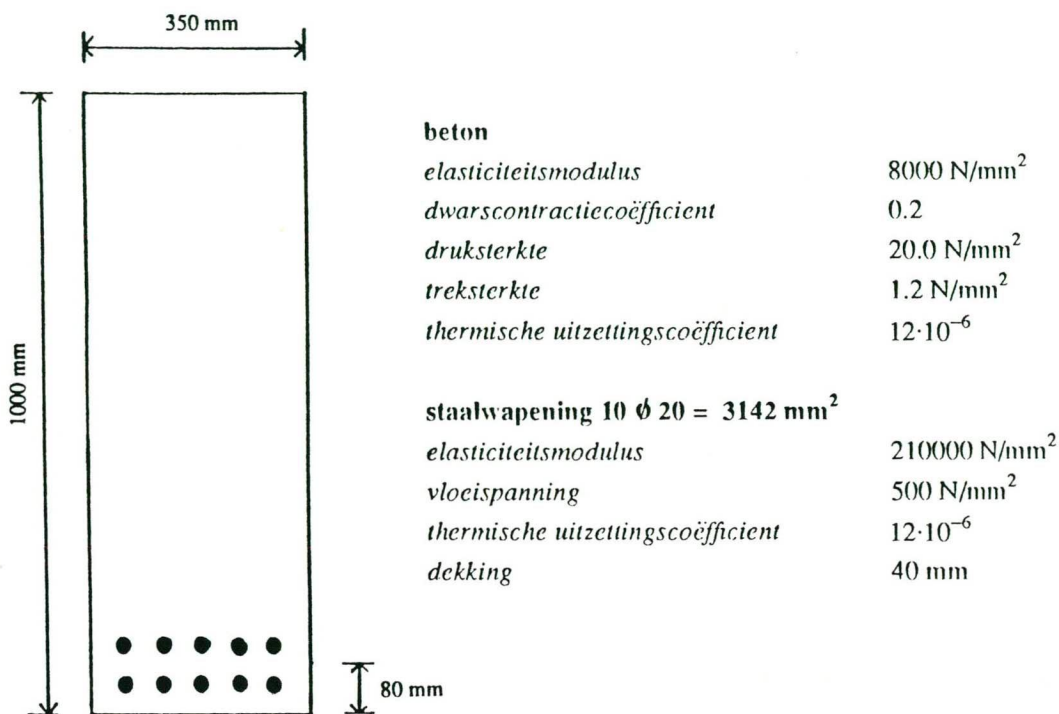
figuur 5.6. constructie afmetingen en elementennet.

De ligger heeft een constante doorsnede over de lengte. De onderwapening wordt gelegd in twee lagen. Dwarskrachtwapening wordt niet in de beschouwing meegenomen.

De constructie wordt gemodelleerd met plane stress elementen (CQ16M). Wegens de symmetrie is het beschouwen van de halve constructie voldoende. Het elementenmodel bestaat uit 4 elementen over de hoogte en 8 elementen over de lengte. Er wordt rekening gehouden met scheurvorming in beton en met plasticiteit in beton en staal.

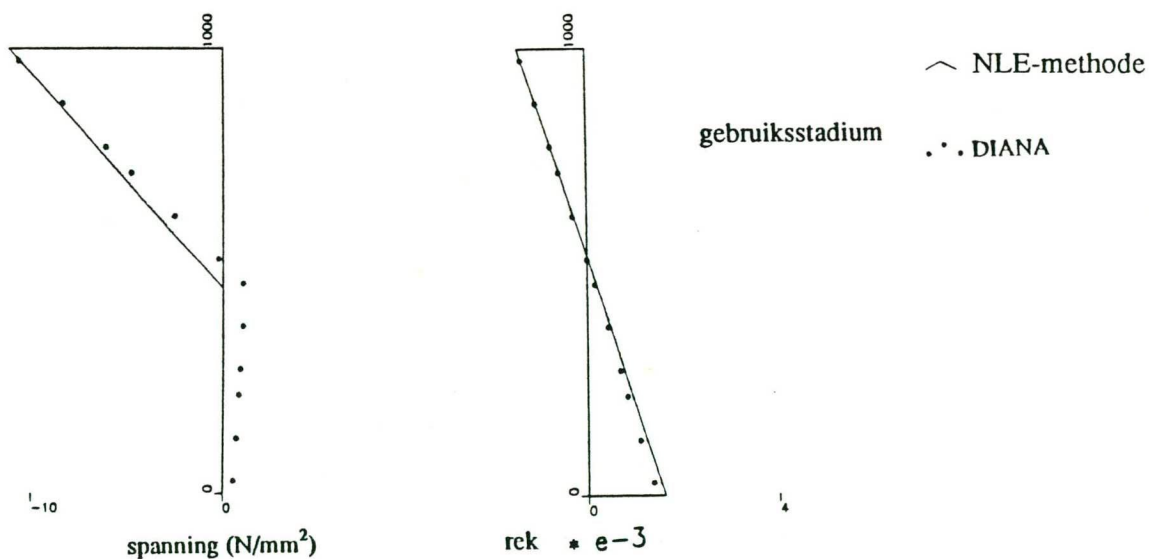
De middendoorsnede van de balk wordt beschouwd. Het inwendige moment dat de balk levert

## Statisch bepaalde betonnen ligger



figuur 5.7. doorsnede gegevens.

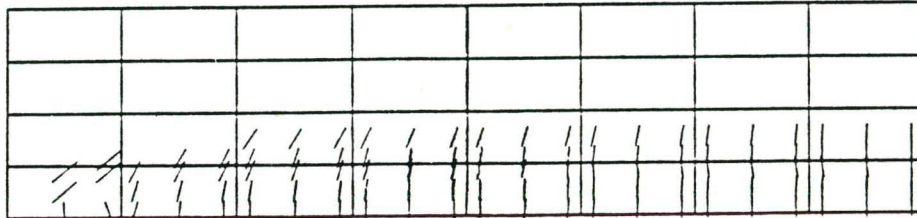
moet gelijk zijn aan het uitwendige moment. Het rekdiagram en het spanningsdiagram van de midden doorsnede worden theoretisch berekend met behulp van de niet-lineair elastisch theorie (NLE-methode). Aangenomen wordt dat beton geen trek op kan nemen.



figuur 5.8. spanningen en rekken in de gebruiksfase.

Het spannings-diagram en het rek-diagram berekend volgens de NLE-methode vertoont redelijke gelijkenis met het numeriek bepaalde spanningsdiagram (figuur 5.8). Het verschil

wordt verklaard uit het feit dat de treksterkte van beton wordt verwaarloosd in de NLE-methode. Hierdoor wordt de numeriek bepaalde staalspanning lager. De doorbuiging is analytisch minder eenvoudig te bepalen aangezien de buigstijfheid als gevolg van scheurvorming niet constant is over de lengte van de balk.



*figuur 5.9. scheurenpatroon in het gebruiksstadium.*

Het scheurenpatroon in de gebruiksfase vertoont een betrouwbaar beeld. In het midden van de ligger ontstaan trekspanningen in de onderste helft. Het moment is in het middengedeelte vrij constant. Zoals te zien in figuur 5.9 ontstaan voornamelijk buigscheuren, dicht bij de oplegging ontstaan enkele dwarskrachtscheuren.

### 5.2.2 Temperatuur belasting

De uitwendige gelijkmatig verdeelde belasting wordt constant gehouden. De middendoorsnede moet hierdoor bij verandering van de temperatuur een constant inwendig moment leveren. De temperatuur van de balk wordt over de hele constructie gelijkmatig verhoogd. De constructie zet uit onder invloed van de uitzettingscoëfficiënt. Deze uitzetting veroorzaakt geen spanningen omdat de vervorming vrij kan optreden. De constructie is statisch bepaald en de verhoging van de temperatuur is uniform verdeeld over de balk.

In de berekening hangen de elasticiteitsmoduli en de vloeiooppervlakken van het beton en het wapeningsstaal af van de temperatuur (figuur 5.10).

In de numerieke berekening worden tijdstappen genomen. De temperatuur is een functie van de tijd. Door het oplopen van de temperatuur veranderen de materiaaleigenschappen en daarmee de rekken en spanningen. Het blijft mogelijk de rekken en spanningen in de middendoorsnede met behulp van de NLE-methode te bepalen.

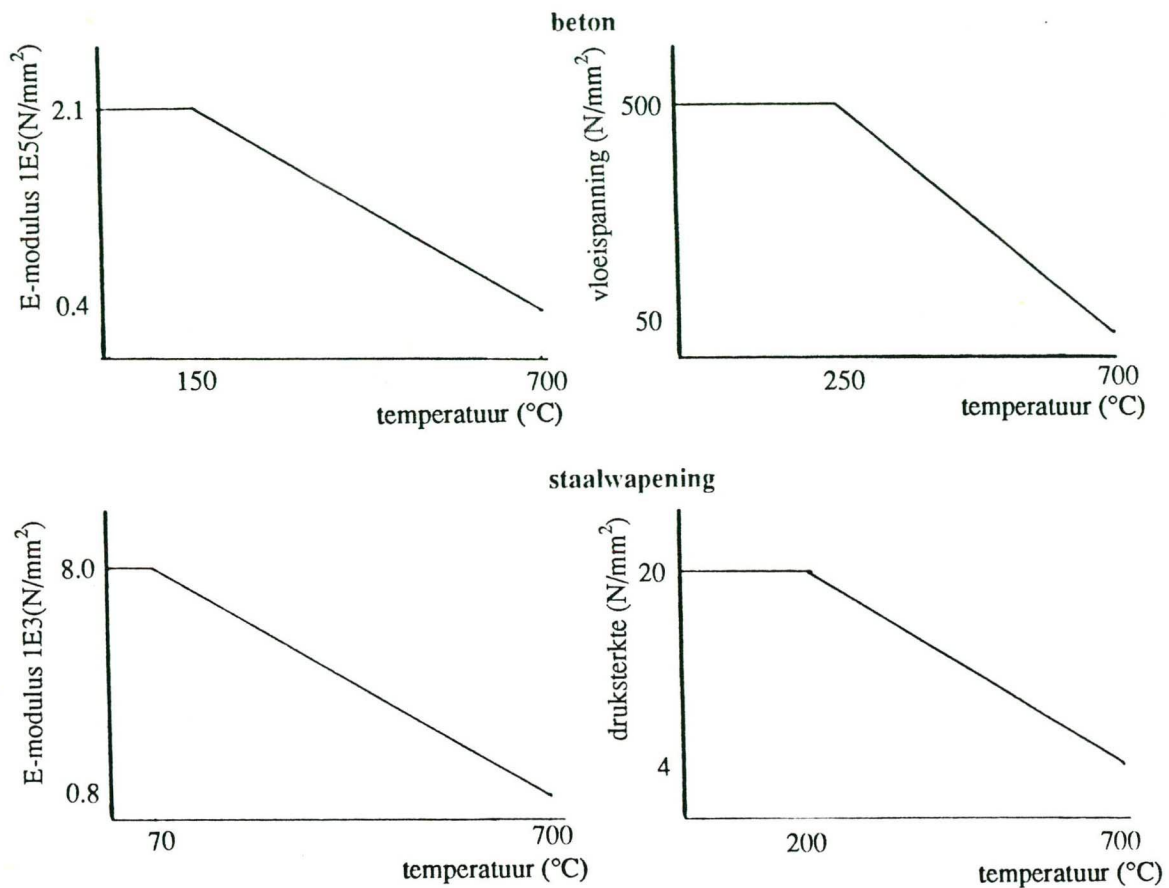
### 5.2.3 Resultaten

Bij oplopen van de temperatuur vindt een herverdeling van de spanningen plaats. De elasticiteitsmodulus van beton hangt niet op dezelfde wijze af van de temperatuur als de elasticiteitsmodulus van staal. Als gevolg van het afnemen van de stijfheid gaat de constructie meer vervormen. Later gaat het staal vloeien als gevolg van het inkrimpen van het vloeiooppervlak. De spanning in het staal neemt af. Om hetzelfde uitwendige moment te kunnen blijven opnemen moet de neutrale lijn opschuiven naar boven. De betondrukzone wordt plastisch en de constructie bezwijkt.

Op verschillende tijdstippen zijn de spanningen en de rekken zowel analytisch als numeriek berekend. De spannings- en rekdiagrammen zijn weergegeven in figuur 5.11.



## Statisch bepaalde betonnen ligger



figuur 5.10. temperatuur diagrammen.

### — $T = 150^{\circ}C$

De rekken zijn groter dan in het gebruiksstadium. De analytisch berekende rek wijkt in het trekgebied licht af van de numeriek berekende rek. Dit is te verklaren met het verschil in maximale trekspanning in de twee berekeningen. Als gevolg hiervan blijft ook de staalspanning in de numerieke berekening iets achter bij de analytisch berekende staalspanning. Door de grotere rekken zijn de spanningen in het trekgebied kleiner geworden.

### — $T = 300^{\circ}C$

Dezelfde tendens zet zich door. Door het kleiner worden van de elasticiteitsmoduli van beton en staal vervormt de constructie sterker.

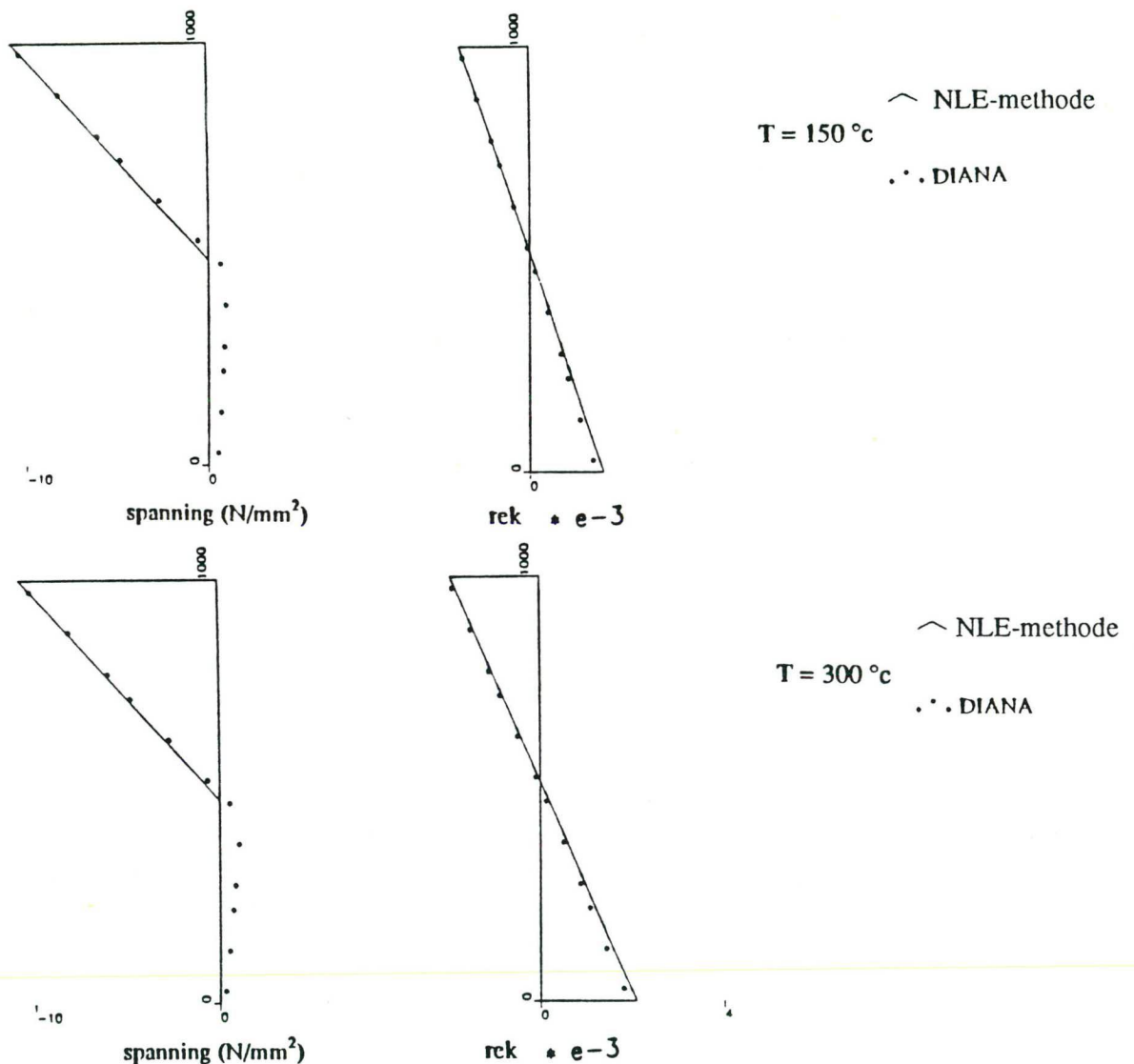
### — $T = 450^{\circ}C$

Het staal is juist gaan vloeien als gevolg van het afnemen van de vloeispanning. Bij verdere toename van de temperatuur neemt de kracht in het staal af. De neutrale lijn verschuift naar boven en de vervormingen nemen snel toe. Op dit tijdstip vertonen de analytische en de numerieke berekening nog een grote overeenstemming.

### — $T = 475^{\circ}C$

In de analytische berekening is de betondrukzone plastisch geworden. De rekken zijn zeer groot. Volgens de NLE-methode kan de constructie een maximale temperatuur verdragen





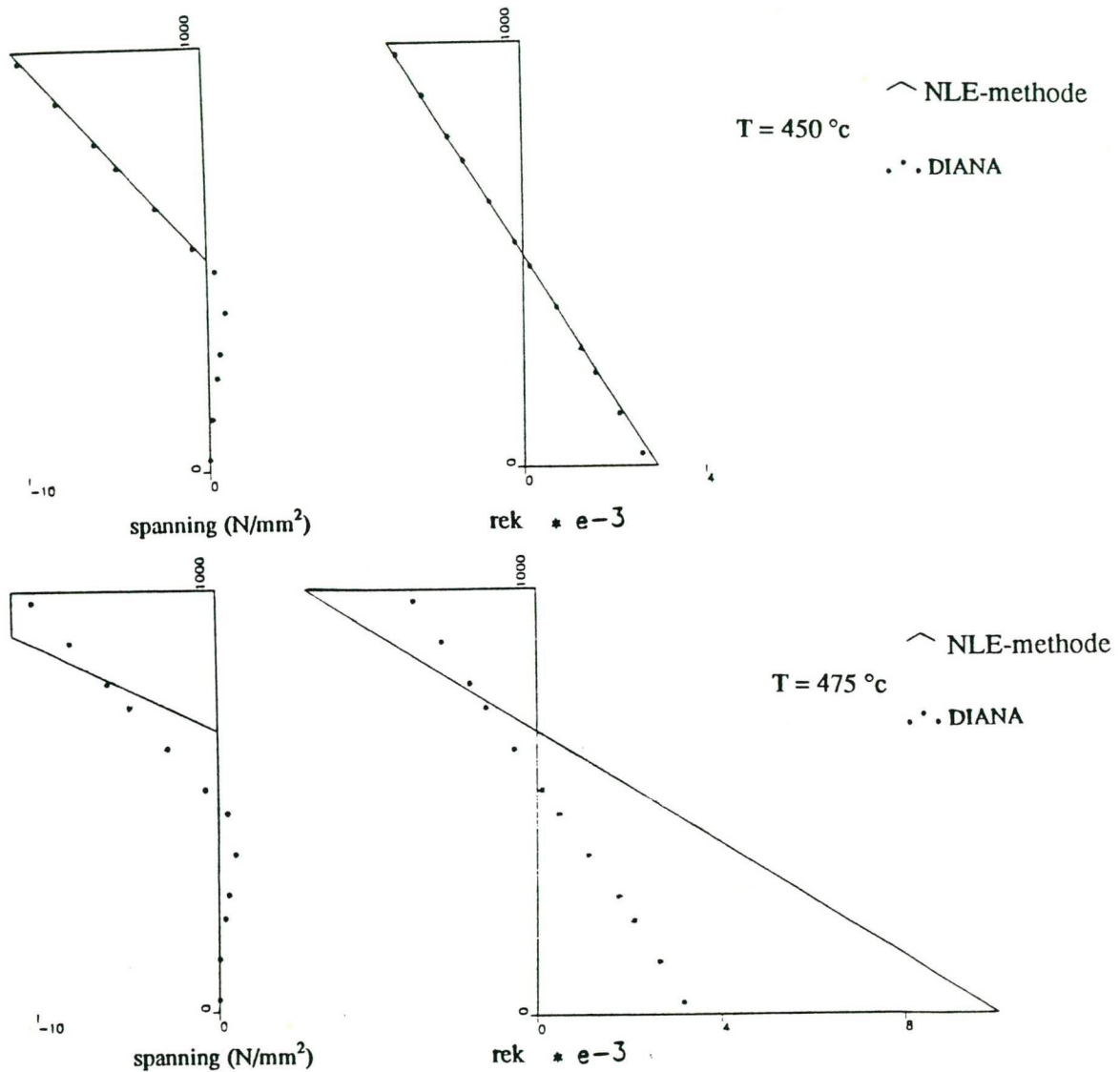
figuur 5.11. spanningen en rekken bij verschillende temperaturen.

van  $480\text{ }^{\circ}\text{C}$ . In de numerieke berekening heeft de betondrukzone het plastisch gebied nog niet bereikt. Vooral de rekken vertonen een groot verschil met de analytische waarden.

Opgemerkt wordt dat de proef in wezen belastinggestuurd plaatsvindt. Aan het last-zakking diagram van de middendoorsnede (figuur 5.12) is te zien dat in de bezwijkfase zeer kleine stappen genomen moeten worden om convergentie te bereiken.

De numerieke berekening bereikt een maximale temperatuur bij  $494^{\circ}\text{C}$ . De verklaring voor het verschil tussen de analytische en de numerieke berekening is wederom het verschil in maximale treksterkte. Door een kleine bijdrage van het beton aan de trekkracht wordt de spanning in het staal kleiner. vlak voor bezwijken geeft dit een aanmerkelijk verschil in spanningen en rekken te zien. Vergelijken we de spanningen van de numerieke berekening op  $T=493^{\circ}\text{C}$  en de

## Statisch bepaalde betonnen ligger

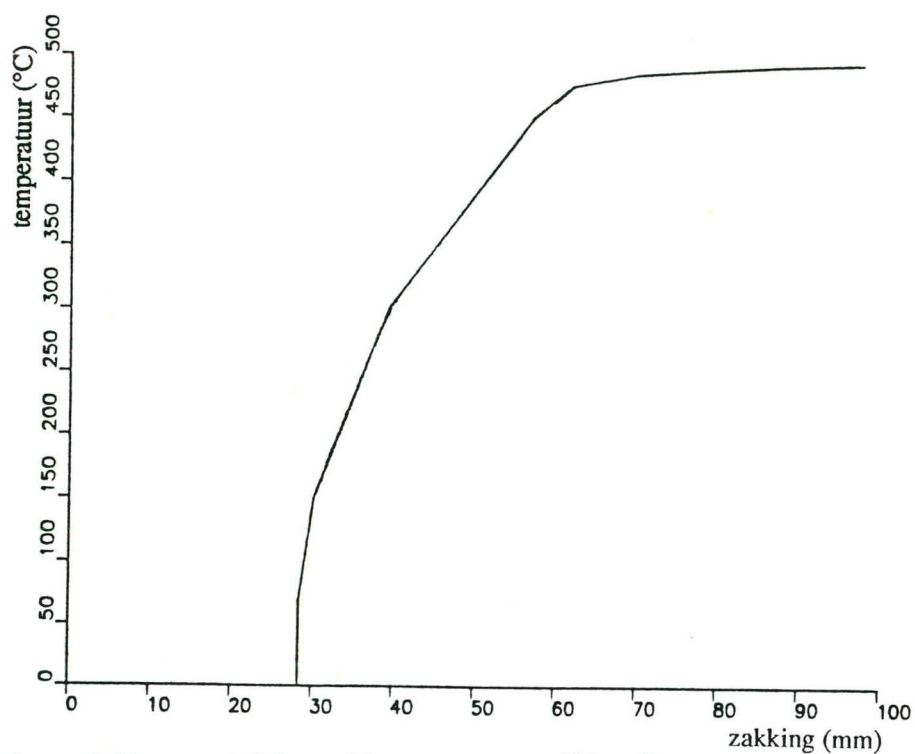


figuur 5.11. spanningen en rekken bij verschillende temperaturen.

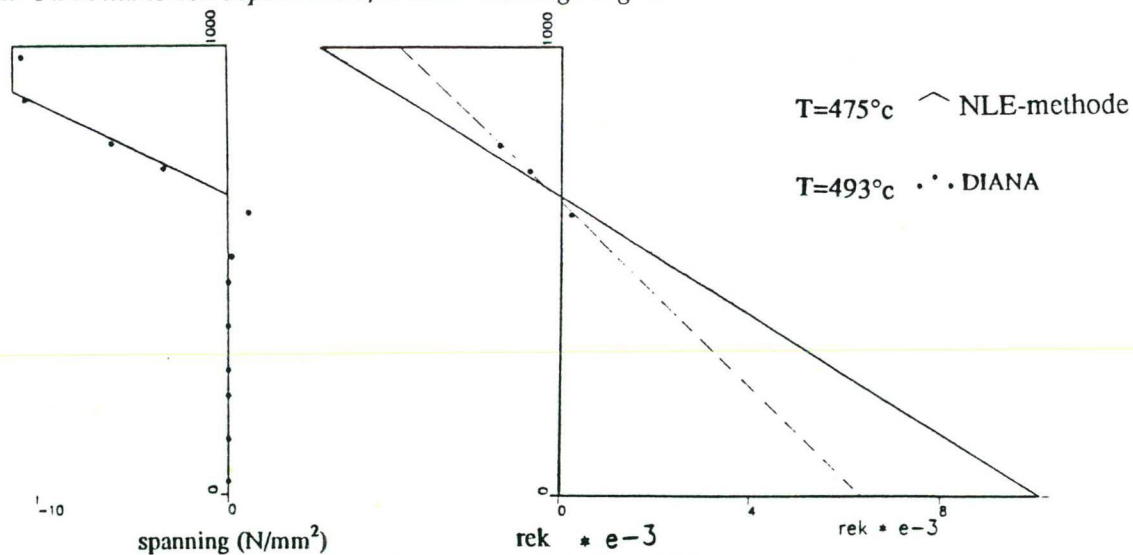
spanningen van de analytische berekening op  $T=475^{\circ}\text{C}$  dan is de overeenkomst aanmerkelijk beter. Dit is weergegeven in figuur 5.13. Als laatste resultaat volgt nog het scheurenpatroon bij  $T=495^{\circ}\text{C}$  in figuur 5.14. Duidelijk is te zien dat de constructie bezwijkt op buiging.

De overeenkomst tussen de analytische en de numerieke berekening laten zien dat de geteste fenomenen betrouwbare resultaten geven.

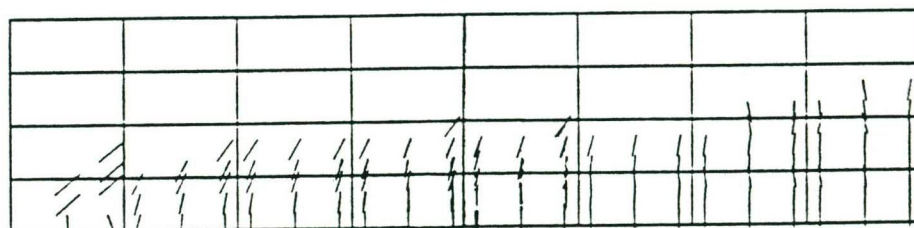
## Statisch bepaalde betonnen ligger



figuur 5.12. numeriek bepaald temperatuur zakking diagram



figuur 5.13. spanningen in analytische en numerieke bezwijkfase.



figuur 5.14. scheurenpatroon in het bezwijkstadium.





## 6. Conclusies en aanbevelingen

Het is mogelijk om met het eindige elementenmethode pakket DIANA een constructie te berekenen die onderworpen is aan een temperatuurbelasting. In de berekening worden tijdstappen voorgeschreven. Dit gebeurt in het moduul NONLIN voor niet-lineaire berekeningen. Door middel van een tijd-temperatuur diagram wordt de temperatuur in ieder knooppunt als functie van de tijd opgegeven. De thermische rek die optreedt als gevolg van de temperatuurverandering kan gemodelleerd worden met een thermische uitzettingscoëfficiënt.

Rekening wordt gehouden met de verandering van de materiaaleigenschappen. Het is mogelijk om de elasticiteitsmodulus, de vloeispanning en de uitzettingscoëfficiënt op te geven als functie van de temperatuur. De niet-lineaire fenomenen scheurvorming en plasticiteit kunnen gecombineerd worden met de temperatuurbelasting. De theorie is eveneens toepasbaar voor gewapende en voorgespannen constructies. De eigenschappen van het moedermateriaal en de eigenschappen van de wapening kunnen apart als functie van de temperatuur worden gespecificeerd.

Geëvalueerd zijn drie 2-dimensionale elementen en één volume element. De 2-dimensionale elementen zijn isoparametrisch en hebben 8 knopen en 16 vrijheidsgraden. Het betreft een plane-stress element (CQ16M), een plane-strain element (CQ16E) en een axiaal-symmetrisch element (CQ16A). Het volume element heeft 20 knopen en 60 vrijheidsgraden (CHX60). Meer informatie over de gebruikte elementen staat beschreven in de gebruikershandleiding (de Witte, 1987a).

De gebruikte testvoorbeelden voor temperatuurafhankelijk materiaalgedrag leggen geen groot beslag op de computertijd. Bij een lineair verloop van de uitzettingscoëfficiënt met de temperatuur en bij lineaire hardening moet een Newton-Raphson methode voor de testproblemen in één iteratieslag convergeren.

Van de materiaaleigenschappen die nog niet kunnen worden opgegeven als functie van de temperatuur worden hier de treksterkte en het aanhechtingsgedrag tussen beton en staal vermeld. Voor detailberekeningen is het nodig onderzoek te verrichten naar de invloed van de temperatuur op deze eigenschappen en naar de numerieke behandeling daarvan. De implementatie van de kruip in combinatie met een temperatuurbelasting is hier niet besproken. Dit zal behandeld worden in het tweede deelrapport.



## Literatuurlijst

- Anderberg, Y., Thelandersson, S. (1976), *Stress and deformation characteristics of concrete at high temperatures*. bulletin 54, Lund Institute of Technology, Sweden.
- Anderberg, Y. (1983), *Behaviour of steel at high temperatures*. Rilem Committee 44-PHT, febr.
- Bathe, K.J. (1982), *finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, United States of America.
- Blaauwendraad, J. (1984), *Niet-lineaire numerieke constructiemechanica*. college dictaat B20D, Technische Universiteit Delft, afdeling der Civiele Techniek.
- Borst, R. de, G.M.A. Kusters, P. Nauta & F.C. de Witte (1983), 'DIANA, a comprehensive, but flexible finite element system'. *Finite Element Systems Handbook*, Third Edition, Springer Verlag, Berlin, Germany.
- Borst, R. de, G.M.A. Kusters, P. Nauta & F.C. de Witte (1984a), 'DIANA, a three-dimensional nonlinear finite element package on a micro-computer'. *Engineering Software for Micro-computers*. (eds. B.A. Schrefler et al.), Pineridge Press, Swansea, United Kingdom.
- Borst, R. de (1984b), *Implicit integration of stress-strain laws in thermo-plasticity*. TNO-IBBC report BI-84-43, Rijswijk.
- Borst, R. de, Nauta, P. (1985), 'Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model'. *Engineering Computations*, Vol.2, No.1, March, Pineridge Press, Swansea, United Kingdom.
- Borst, R. de, Rots, J.G.R. e.a. (1986), *Betonmechanica voor modelingenieurs*. Pato dictaat.
- Bramehuber, W., Hilsdorf, H.K. (1987), 'Development of strength and deformability of very young concrete'. *Fracture of concrete and rock*, SEM-RILEM international conference, june 17-19 1987, Houston, USA.
- Foeken, R.J. van (1983), *Elasto-plastisch materiaalgedrag met kruip en temperatuursafhankelijkheid in DIANA*. TNO-IBBC, rapport BI-83-51, Rijswijk.
- Foeken, R.J. van (1984), *Evaluation of the thermo-elasto-plastic-creep material model in combination with cracking*. TNO-IBBC rapport BI-84-63, Rijswijk.
- Gantvoort, G.J. (1983), *De brandwerendheid van betonconstructies en de betonvoorschriften*. TNO-IBBC, BI-83-8, Rijswijk.
- Jansen, J.C.M. (1985), *Het oplossen van warmtestromingsproblemen met behulp van de eindige elementen methode*. deel 1 en 2, TNO-IBBC rapport BI-85-29, Rijswijk.
- Koiter, W.T. (1953), 'On partially plastic thick-walled tubes'. *Biezeno Anniversary Volume*, pp.232-252.

- Reinhardt, H.W. (1979), 'Mechanische en fysische eigenschappen van beton tussen -190°C en +400°C', *Cement XXXI* nr.1, 1979.
- Rots, J.G., P.Nauta, G.M.A.Kusters & J.Blaauwendraad (1985), Smeared crack approach and fracture localization in concrete. *Heron*, Vol.30, No.1, Rijswijk.
- Schneider, U. (1982), 'Verhalten von Beton bei hohen Temperaturen.', *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 337.
- Valliappan, S. (1981), *Continuum mechanics: fundamentals*. A.A.Balkema, Rotterdam.
- Walraven, J.C. (1980), *Aggregate interlock: a theoretical and experimental analysis*. Dissertatie, Technische Universiteit Delft.
- Witte, F.C.de (1987a), *DIANA gebruikers handleiding*. TNO-IBBC, Rijswijk.
- Witte, F.C.de (1987b), *DIANA statica cursus*. TNO-IBBC, rapport BI-87-84, Rijswijk.



## Bijlagen

### Bijlage 1: Temperatuurbelasting op een dikwandige buis.

#### Thermisch uitzetting en invloed van de temperatuur op de E-modulus.

In deze bijlage wordt een analytische oplossing afgeleid voor temperatuurbelasting op een dikwandige buis. De geometrie en de belasting zijn axiaalsymmetrisch en in de z-richting wordt een vlakke vervormings toestand verondersteld. Naast een volumeverandering ten gevolge van de verandering van de temperatuur wordt de invloed van de temperatuur op de elasticiteitsmodulus in rekening gebracht.

De basis vergelijkingen voor deze toestand zijn de volgende.

*evenwichts vergelijking.*

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

*kinematische vergelijkingen.*

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\epsilon_z = 0$$

*constitutieve vergelijkingen.*

$$\epsilon_r^e = \frac{1}{E} \left[ \sigma_r - \nu \sigma_\theta - \nu \sigma_z \right]$$

$$\epsilon_\theta^e = \frac{1}{E} \left[ \sigma_\theta - \nu \sigma_z - \nu \sigma_r \right]$$

$$\epsilon_z^e = \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu \sigma_r - \nu \sigma_\theta \right]$$

De temperatuurverandering van de buis is uniform over de doorsnede. De elasticiteitsmodulus wordt afhankelijk gesteld van de temperatuur. De totale rek  $\epsilon$  bestaat bij temperatuurbelasting uit een elastische rek  $\epsilon^e$  en een thermische rek  $\epsilon^t$ . Differentiëren van de constitutieve vergelijkingen en invullen van de bovengenoemde relatie geeft de volgende vergelijkingen.

$$E (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_r^t) + \dot{E} (\epsilon_r - \epsilon_r^t) = \dot{\sigma}_r - \nu \dot{\sigma}_\theta - \nu \dot{\sigma}_z$$

$$E (\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_\theta^t) + \dot{E} (\epsilon_\theta - \epsilon_\theta^t) = -\nu \dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\theta - \nu \dot{\sigma}_z$$

## Bijlagen

$$E (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_z^T) + \dot{E} (\epsilon_z - \epsilon_z^T) = -v\dot{\sigma}_r - v\dot{\sigma}_\theta + \dot{\sigma}_z$$

De incrementele thermisch rek wordt beschreven met de thermische uitzettingscoëfficiënt  $\alpha$ .

$$\dot{\epsilon}_r^t = \dot{\epsilon}_\theta^t = \dot{\epsilon}_z^t = \alpha \dot{T}$$

Elimineren van de incrementele thermische rek geeft de volgende uitdrukkingen voor de incrementele totale rekken.

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_r - v\dot{\sigma}_\theta - v\dot{\sigma}_z) + \alpha \dot{T} - \frac{\dot{E}}{E} \epsilon_r^e$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{E} (-v\dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\theta - v\dot{\sigma}_z) + \alpha \dot{T} - \frac{\dot{E}}{E} \epsilon_\theta^e$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{1}{E} (-v\dot{\sigma}_r - v\dot{\sigma}_\theta + \dot{\sigma}_z) + \alpha \dot{T} - \frac{\dot{E}}{E} \epsilon_z^e$$

Volgens de vlakke vervormings voorwaarde geldt  $\dot{\epsilon}_z = 0$ .

$$\dot{\sigma}_z = v(\dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\theta) - \alpha E \dot{T} + \dot{E} \epsilon_z^e$$

Er blijven nu twee vergelijkingen over.

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{1+v}{E} \left[ (1-v)\dot{\sigma}_r - v\dot{\sigma}_\theta \right] + (1+v)\alpha \dot{T} - \frac{\dot{E}}{E} (\epsilon_r^e + v\epsilon_z^e)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{1+v}{E} \left[ -v\dot{\sigma}_r + (1-v)\dot{\sigma}_\theta \right] + (1+v)\alpha \dot{T} - \frac{\dot{E}}{E} (\epsilon_\theta^e + v\epsilon_z^e)$$

Na omschrijven.

$$(1-v)\dot{\sigma}_r - v\dot{\sigma}_\theta = E \left[ \frac{\dot{\epsilon}_r}{1+v} - \alpha \dot{T} \right] + \frac{\dot{E}}{1+v} (\epsilon_r^e + v\epsilon_z^e)$$

$$-v\dot{\sigma}_r + (1-v)\dot{\sigma}_\theta = E \left[ \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{1+v} - \alpha \dot{T} \right] + \frac{\dot{E}}{1+v} (\epsilon_\theta^e + v\epsilon_z^e)$$

Oplossen voor  $\dot{\sigma}_r$  en  $\dot{\sigma}_\theta$  geeft de volgende vergelijkingen.

$$\dot{\sigma}_r = \frac{E}{(1-2v)(1+v)} \left[ (1-v)\dot{\epsilon}_r^e + v\dot{\epsilon}_\theta^e + v\dot{\epsilon}_z^e \right] + \frac{\dot{E}}{(1-2v)(1+v)} \left[ (1-v)\epsilon_r^e + v\epsilon_\theta^e + v\epsilon_z^e \right]$$

$$\dot{\sigma}_\theta = \frac{E}{(1-2v)(1+v)} \left[ v\dot{\epsilon}_r^e + (1-v)\dot{\epsilon}_\theta^e + v\dot{\epsilon}_z^e \right] + \frac{\dot{E}}{(1-2v)(1+v)} \left[ v\epsilon_r^e + (1-v)\epsilon_\theta^e + v\epsilon_z^e \right]$$

De spanningen kunnen vervolgens uitgedrukt worden in de verplaatsingen.

$$\dot{\sigma}_r = \frac{E}{(1-2v)(1+v)} \left[ (1-v) \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + v \frac{\dot{u}}{r} \right] - \frac{E \alpha \dot{T}}{1-2v} + \frac{\dot{E}}{(1-2v)(1+v)} \left[ (1-v) \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{u}{r} \right] - \frac{\dot{E} \alpha T}{1-2v}$$

$$\dot{\sigma}_\theta = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \nu \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + (1-\nu) \frac{\dot{u}}{r} \right] - \frac{E\alpha \dot{T}}{1-2\nu} + \frac{\dot{E}}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial r} + (1-\nu) \frac{u}{r} \right] - \frac{\dot{E}\alpha T}{1-2\nu}$$

Deze uitdrukkingen worden gesubstitueerd in de evenwichts vergelijking.

$$\begin{aligned} & \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right] + \frac{\dot{E}}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \\ & \frac{1}{r} \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} - (1-2\nu) \frac{\dot{u}}{r} \right] + \frac{1}{r} \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial u}{\partial r} - (1-2\nu) \frac{u}{r} \right] = 0 \end{aligned}$$

Omwerken van deze vergelijking levert de volgende differentiaalvergelijking.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\dot{u}}{r} \right] + \frac{\dot{E}}{E} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right] \right] = 0$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking wordt overzichtelijker indien de differentiatie naar de tijd in eerste instantie buiten beschouwing wordt gelaten. Voor het stationaire geval geldt de volgende vergelijking.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right] = 0$$

Oplossen geeft.

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = A$$

$$u = Ar + \frac{B}{r}$$

Dit geeft voor de rekken.

$$\epsilon_r = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\epsilon_\theta = A + \frac{B}{r^2}$$

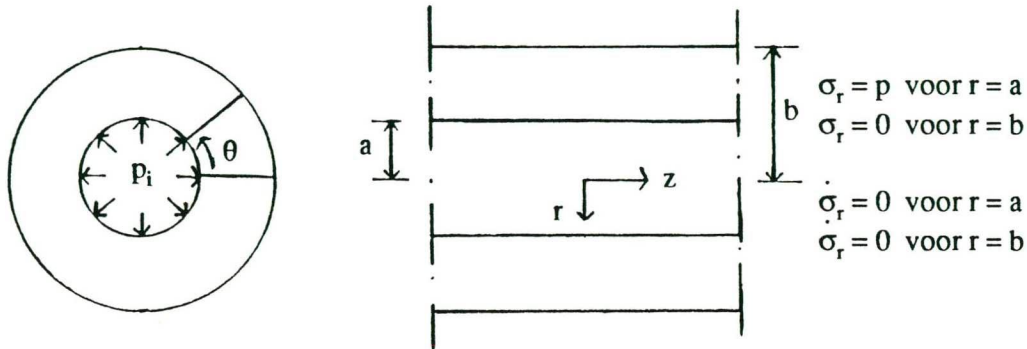
En voor de spanningen.

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ A - (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ A + (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

## Bijlagen

De constanten A en B zijn op te lossen met behulp van de randvoorwaarden. In het geval van inwendige overdruk in de buis gelden de volgende randvoorwaarden.



figuur b.1. buis onder inwendige overdruk.

Invullen van de randvoorwaarden in de vergelijking voor de spanning in  $r$ -richting levert de constanten A en B.

$$A = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p + (1+\nu)\alpha T$$

$$B = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{(1+\nu)}{E} p$$

Uiteindelijk komen we tot de volgende uitdrukkingen voor de spanningen en de rekken.

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right] p$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left[ \frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right] p$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu a^2 b^2}{(b^2 - a^2)b^2} p - \alpha E T$$

$$\epsilon_r = \frac{p_i a^2 (1+\nu)(1-2\nu)}{E(b^2 - a^2)} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2(1-2\nu)} \right] + (1+\nu)\alpha T$$



$$\varepsilon_{\theta} = \frac{p_i a^2 (1+\nu)(1-2\nu)}{E(b^2 - a^2)} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2(1-2\nu)} \right] + (1+\nu)\alpha T$$

$$u_r = \frac{p_i a^2 (1+\nu)(1-2\nu)}{(b^2 - a^2)E} \left[ r + \frac{b^2}{r(1-2\nu)} \right] + r(1+\nu)\alpha ET$$

Differentiëren we nu de bovenstaande vergelijkingen naar de tijd dan blijkt dat deze oplossing ook geldt voor de algemene differentiaalvergelijking en voldoet aan de randvoorwaarde in de tijd.

$$\dot{\sigma}_r = 0$$

$$\dot{\sigma}_{\theta} = 0$$

$$\dot{\sigma}_z = \alpha E \dot{T} + \alpha \dot{E} T$$

$$\dot{u}_r = r(1+\nu)\alpha E \dot{T} + r(1+\nu)\alpha \dot{E} T$$

Hiermee is een oplossing gevonden voor het probleem van een temperatuurbelasting op een axiaalsymmetrische oneindig lange buis met invloed van de temperatuur op de elasticiteitsmodulus.

## Bijlagen

### Bijlage 2: Temperatuurbelasting op een dikwandige buis. Invloed van de temperatuur op de vloeispanning.

De temperatuurberekening wordt ingedeeld in drie fases. In de eerste fase blijft de hele buis elastisch. In de tweede fase is het binnenste deel van de buis gevloeid, het buitenste deel is nog elastisch. In de derde fase is de gehele buis gevloeid. Het vloeicriterium van Tresca wordt gebruikt.

Voor de vergelijking tussen de numerieke en de analytische berekening wordt de verplaatsing in r-richting  $u_r$  als uitgangspunt genomen. In een plane strain toestand kan  $\sigma_z$  uitgedrukt worden in  $\sigma_r$  en  $\sigma_\theta$ . De verplaatsing in r-richting kan dan uitgedrukt worden in  $\sigma_r$  en  $\sigma_\theta$ .

$$u_r = r \epsilon_\theta = \frac{r(1+\nu)}{E} \left[ (1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r \right]$$

*fase I: de buis is geheel elastisch*

De spanningen zijn voor het algemene geval berekend in bijlage 1. Voor het beschouwde geval worden de spanningen weergegeven met de volgende vergelijkingen.

$$\sigma_r = \frac{p_i a^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_i a^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu p_i a^2}{b^2 - a^2}$$

$$u_r = \frac{p_i a^2}{E(b^2 - a^2)} \left[ r(1+\nu)(1-2\nu) + \frac{b^2}{r}(1+\nu) \right]$$

*fase II: de buis is gedeeltelijk plastisch.*

In het beschouwde geval geldt altijd  $\sigma_r < \sigma_z < \sigma_\theta$ . Volgens het vloeicriterium van Tresca treedt vloeien op als geldt.

$$\sigma_\theta - \sigma_r = |\sigma^{vl}|$$

Vloeien treedt voor het eerst op aan de binnenkant van de buis. Invullen van de spanning op  $r=a$  in de vloeivoorwaarde levert de waarde voor  $\sigma^{vl}$  waarop de buis begint te vloeien.

$$\sigma^{vl} = \frac{2p_i a^2 b^2}{(b^2 - a^2)a^2}$$

Onderscheid wordt nu gemaakt tussen het plastische en het elastische gebied. Op de grens hier-tussen ligt het vloeifront waar geldt  $r = c$ .

*elastisch gebied*  $c < r < b$

In het elastische gedeelte gelden de volgende vergelijkingen voor de spanningen.

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_z = 2\nu A$$

De randvoorwaarden bepalen de constanten A en B.

$$r = b : \sigma_r = 0$$

$$r = c : \sigma_\theta - \sigma_r = \sigma^{vl}$$

$$B = \frac{\sigma^{vl} c^2}{2} \quad A = \frac{\sigma^{vl} c^2}{2b^2}$$

Dit geeft de volgende uitdrukkingen voor de spanningen in het elastische gebied.

$$\sigma_r = \frac{\sigma^{vl}}{2} \left( \frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma^{vl}}{2} \left( \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu \sigma^{vl} c^2}{b^2}$$

Hiermee zijn de uitdrukkingen voor de spanningen in het elastische gebied gegeven. Met deze spanningen kan de verplaatsing in r-richting berekend worden.

$$u_r = \frac{r(1+\nu)\sigma^{vl}}{2E} \left[ (1-\nu) \left( \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{r^2} \right) - \nu \left( \frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{r^2} \right) \right]$$

$$u_r = \frac{r(1+\nu)\sigma^{vl}}{2E} \left[ (1-2\nu) \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{r^2} \right]$$

## Bijlagen

*plastisch gebied*

$$a < r < c$$

In het plastische gedeelte voldoet de spanning aan de vloeifunctie van Tresca. Invullen van de vloeifunctie in de evenwichts vergelijking levert de volgende vergelijking op.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\sigma_r = \sigma^{vl} \ln r + \ln C_0$$

$$\sigma_\theta = \sigma^{vl}(1 + \ln r) + \ln C_0$$

De uitdrukkingen voor de spanningen in het plastische gebied bevatten nog de onbekende  $C_0$ . De overgangsvoorwaarde voor de continuïteit van  $\sigma_r$  levert deze onbekende op.

$$r = c : \sigma_r^p = \sigma_r^e$$

$$\sigma^{vl} \ln c + \ln C_0 = \frac{\sigma^{vl}}{2} \left( \frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{c^2} \right)$$

$$\ln C_0 = \frac{\sigma^{vl}}{2} \left( \frac{c^2}{b^2} - 2 \ln c - 1 \right)$$

Dit geeft de volgende uitdrukkingen voor de spanningen in het plastische gebied.

$$\sigma_r = \frac{\sigma^{vl}}{2} \left( 2 \ln \frac{r}{c} + \frac{c^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma^{vl}}{2} \left( 2 \ln \frac{r}{c} + \frac{c^2}{b^2} + 1 \right)$$

$$\sigma_z = \nu \sigma^{vl} \left( 2 \ln \frac{r}{c} + \frac{c^2}{b^2} \right)$$

Naast elastische rekken zijn er nu ook plastische rekken.

$$\epsilon_r = \epsilon_r^e + \epsilon_r^{pl}$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_\theta^e + \epsilon_\theta^{pl}$$

Er treedt geen volumeverandering op ten gevolge van de plastische rekken. De vloeirek in z-richting wordt volgens het criterium van Tresca niet betrokken bij de plastische vervorming. De som van de plastische rek in r-richting en de plastische rek in  $\theta$ -richting is dus nul. De verplaatsing in r-richting kan weer beschreven worden met de spanningen.

$$\epsilon_r + \epsilon_\theta = \epsilon_r^e + \epsilon_\theta^e + \epsilon_r^p + \epsilon_\theta^p = \epsilon_r^e + \epsilon_\theta^e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u}{r}$$

De verplaatsing  $u_r$  wordt gevonden door de volgende differentiaal vergelijking op te lossen.



$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{(1+\nu)}{E} \left[ (1-2\nu)(\sigma_r + \sigma_\theta) \right]$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{(1+\nu)}{E} (1-2\nu) \sigma^{vl} \left[ 2 \ln \frac{r}{c} + \frac{c^2}{b^2} \right]$$

De oplossing verloopt als volgt.  
stel

$$u_r = \frac{C1}{r} + C2 r \ln \frac{r}{c} + C3 r$$

invullen

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = 2C2 \ln \frac{r}{c} + C2 + 2C3$$

Hieruit zijn de constanten C2 en C3 te bepalen.

$$C2 = \frac{(1+\nu)}{E} (1-2\nu) \sigma^{vl} \left[ \frac{c^2}{2b^2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$C3 = \frac{(1+\nu)}{E} (1-2\nu) \sigma^{vl}$$

De overgangsvoorwaarde voor continuïteit van de verplaatsing in r-richting op de grens tussen elastisch en plastisch gebied levert de laatste onbekende C1 op.

$$\frac{C1}{c} + \frac{c(1+\nu)\sigma^{vl}}{E} (1-2\nu) \left[ \frac{c^2}{2b^2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{c(1+\nu)\sigma^{vl}}{2E} \left[ (1-2\nu) \frac{c^2}{b^2} - 1 \right]$$

$$C1 = \frac{(1+\nu)\sigma^{vl}}{E} c^2 (1-\nu)$$

Uiteindelijk is de volgende uitdrukking verkregen voor de verplaatsing in r-richting in het plastische gedeelte.

$$u_r = \frac{\sigma^{vl} c^2 (1-\nu)(1+\nu)}{Er} + \frac{\sigma^{vl} r (1-2\nu)(1+\nu)}{E} \left[ \ln \frac{r}{c} + \frac{c^2}{2b^2} - \frac{1}{2} \right]$$

De plaats van het vloeifront wordt verkregen door de randvoorwaarde voor  $\sigma_r$  aan de binnenkant van de buis op  $r = a$  in te vullen.

$$p_i = \frac{\sigma^{vl}}{2} \left( 2 \ln \frac{a}{c} + \frac{c^2}{b^2} + 1 \right)$$

## Bijlagen

*fase III: de buis is geheel plastisch en bezwijkt.*

De uitdrukkingen voor de spanningen zijn dezelfde als voor het plastische gebied van fase II. Het vloeifront heeft nu de rand  $r=b$  bereikt.

$$\sigma_r = \sigma^{vl} \ln r + \ln C_0 = 0$$

De randvoorwaarde voor  $r=b$  is de vloeispanning.

$$\ln C_0 = -\sigma^{vl} \ln b$$

De volgende uitdrukkingen voor de spanningen worden nu verkregen.

$$\sigma_r = \sigma^{vl} \ln \frac{r}{b}$$

$$\sigma_\theta = \sigma^{vl} \left(1 + \ln \frac{r}{b}\right)$$

$$\sigma_z = \nu \sigma^{vl} \left(2 \ln \frac{r}{b} + 1\right)$$

De bezwijkgrens wordt bereikt als de vloeispanning tot de volgende waarde is gedaald.

$$\sigma^{vl} = p_i \ln \frac{b}{a}$$

De verplaatsingen zijn op dit punt nog eindig.

$$u_r = \frac{\sigma^{vl} b^2 (1-\nu)(1+\nu)}{Er} + \frac{\sigma^{vl} r (1-2\nu)(1+\nu)}{E} \left[ \ln \frac{r}{b} \right]$$

De situatie is instabiel. Indien de temperatuur oploopt en de vloeispanning neemt verder af kan geen evenwicht meer worden bereikt met de inwendige overdruk. De vervormingen worden oneindig.

De verplaatsingen  $u_r$  zijn hiermee beschreven voor het geval van temperatuurbelasting tot bezwijken. De analytische oplossing is gesloten.

Het meenemen van een thermische uitzetting heeft als gevolg dat de spanning  $\sigma_z$  niet meer noodzakelijk tussen de spanningen  $\sigma_r$  en  $\sigma_\theta$  inligt. Een verandering van de elasticiteitsmodulus als gevolg van een verandering van de temperatuur beïnvloed de berekening niet wezenlijk. De spanningen en de plaats van het vloeifront blijven dezelfde. De verplaatsingen worden bepaald met de aangepaste elasticiteitsmodulus.



