

Ministerie van Verkeer en Waterstaat

Directoraat – Generaal Rijkswaterstaat

RIZA Rijksinstituut voor Integraal Zoetwaterbeheer en Afvalwaterbehandeling

Invloed van de grenswaarde in het model Hydra_b voor het Benedenrivierengebied

RIZA - werkdocument 2002.054.x

Auteur: C.P.M. Geerse

RIZA, afdeling WSH

Lelystad, 25 februari 2002

Samenvatting

Bij Rijkswaterstaat, afdeling RIZA/WSH, zijn recent maatgevende hoogwaterstanden (MHW's) voor het Benedenriviergebied bepaald. Dat is gedaan met het probabilistische model Hydra_b, dat is ontwikkeld voor het berekenen van MHW's en voor kruinhoogten met de faalmechanismes golfoverslag en golfoploop. Een belangrijke stochast in het model Hydra_b is de Rijnafvoer. In Hydra_b worden voor de lagere en de hogere afvoeren twee verschillende berekeningswijzen gehanteerd. De afvoer die de lage en hoge afvoeren scheidt wordt daarbij aangeduid als de grenswaarde. In Hydra_b is de grenswaarde gelijk aan $6000 \text{ m}^3/\text{s}$, wat ongeveer overeenstemt met de eens per jaar afvoer. De berekeningsmethode voor de lagere afvoeren staat bekend als de Deltamethode en kan goed gemotiveerd worden voor de lagere afvoeren. De berekeningsmethode voor de hogere afvoeren is onder meer gebruikt in het project *Uniformering Belasting Waterkeringen* (UBW) en kan goed gemotiveerd worden voor de hogere afvoeren. De twee berekeningswijzen die in Hydra_b worden gebruikt vormen dus een combinatie van in principe reeds bekende berekeningsmethoden. De combinatie van deze twee berekeningswijzen roept wel de vraag op in hoeverre de gekozen grenswaarde van invloed is op de Hydra_b uitkomsten. Indien een andere grenswaarde andere uitkomsten oplevert zou Hydra_b geen goed model vormen voor de hier beschouwde berekeningen.

In dit werkdocument wordt onderzocht wat de invloed van de grenswaarde in Hydra_b is op de uitkomsten van waterstanden en kruinhoogten. Het blijkt dat de keuze van de grenswaarde nauwelijks relevant is voor de uitkomsten, tenzij de grenswaarde te hoog wordt gekozen. Iets preciezer gesteld is de conclusie voor waterstandsberekeningen bij terugkeertijden $T \geq 1250$ jaar, dat de keuze van de grenswaarde in hoge mate irrelevant is voor de uitkomsten, tenzij de grenswaarde hoger dan orde $12000 \text{ m}^3/\text{s}$ (terugkeertijd van deze afvoer is 60 jaar) wordt gekozen. Voor kruinhoogteberekeningen kan, voor decimeringswaarden van maximaal 1.0 meter en $T \geq 1250$ jaar, in ieder geval worden geconcludeerd dat voor grenswaarden tot $9000 \text{ m}^3/\text{s}$ (terugkeertijd van deze afvoer is 7.5 jaar) nooit verschillen groter dan 0.02 meter tussen de uitkomsten kunnen bestaan. Met andere woorden, mits de grenswaarde niet te hoog wordt gekozen, kan het model Hydra_b goed worden gemotiveerd voor de berekeningen van waterstanden en kruinhoogten. Vermoedelijk zal het zo zijn dat ook voor wat hogere grenswaarden dan $9000 \text{ m}^3/\text{s}$ of $12000 \text{ m}^3/\text{s}$ nog steeds kleine verschillen zullen bestaan met de Hydra_b uitkomsten voor grenswaarde $6000 \text{ m}^3/\text{s}$.

De invloed van de grenswaarde is in dit werkdocument op twee manieren onderzocht. Ten eerste zijn met Hydra_b waterstandsberekeningen gemaakt voor een aantal locaties, waarmee de invloed van de grenswaarde kan worden beoordeeld. Ten tweede is gebruik gemaakt van een wiskundige afschatting, die van toepassing is op waterstanden zowel als kruinhoogten, waarmee de invloed van de grenswaarde kan worden afgeschat. De gebruikte afschatting en met name het bewijs daarvan zijn wiskundig zeer gecompliceerd. Het tweede deel van dit werkdocument (hoofdstuk 3 en volgende) is daarom slechts bedoeld voor lezers die goed op de hoogte zijn van de Hydra_b formules en die tevens over een zeer gedegen wiskundige achtergrond beschikken.

Inhoudsopgave

Samenvatting	3
1 Inleiding en conclusies	
1.1 Inleiding	7
1.2 Conclusies	8
2 Vergelijking resultaten volgens Hydra_b en volgens de afschatting	
2.1 Beknopte beschrijving van de afvoerstatistiek	9
2.2 Invloed van de grenswaarde volgens Hydra_ en volgens de afschatting	12
3 Afschatting voor de invloed van de grenswaarde	
3.1 Voorbereidende formules en beschrijving van de wiskundige aannames ten behoeve van de afschatting	19
3.2 Afschatting invloed grenswaarde en voorbeelden van het gebruik van de afschatting	22
4 Bewijs van de afschatting en overige beschouwingen	
4.1 Bewijs van de afschatting	27
4.2 Overige beschouwingen in relatie tot de afschatting	30
4.3 Afschatting voor de getijkans	32
4.4 Extreem hoge grenswaarden en Hydra_b versus de Deltamethode	34
5 Details van het bewijs van de afschatting	
5.1 Regel van Leibniz-variant ten behoeve van invloed grenswaarde	37
5.2 Toepassing van de Leibniz-variant stelling	41
Referenties	49

1 Inleiding en conclusies

1.1 Inleiding

Bij Rijkswaterstaat, afdeling RIZA/WSH, zijn recent maatgevende hoogwaterstanden (MHW's) voor het Benedenrivierengebied bepaald. Dat is gedaan met het probabilistische model Hydra_b, dat is ontwikkeld voor het berekenen van MHW's en voor kruinhoogten met de faalmechanismes golfoverslag en golfoploop. Een belangrijke stochast in het model Hydra_b is de Rijnafoer. In Hydra_b worden voor de lagere en de hogere afvoeren twee verschillende berekeningswijzen gehanteerd. De afvoer die de lage en hoge afvoeren scheidt wordt daarbij aangeduid als de grenswaarde. In Hydra_b is de grenswaarde gelijk aan $6000 \text{ m}^3/\text{s}$, wat ongeveer overeenstemt met de eens per jaar afvoer.

De berekeningswijze voor de lagere afvoeren werd indertijd reeds gebruikt door de Deltacommissie, vandaar dat deze berekeningswijze wordt aangeduid als de 'Deltamethode'. Deze methode is in de afgelopen decennia vaker toegepast voor MHW-berekeningen [nota 61.002.17]; tevens vormt deze methode onderdeel van het programma Dijkkring [Volker, 1989], [Den Heijer, 1994]. In essentie houdt deze berekeningswijze in dat de frequentie per winterhalfjaar van de zeewaterstanden te Maasmond wordt gecombineerd met de momentane kansen van de Rijnafoeren. De berekeningsmethode in Hydra_b voor de hogere afvoeren maakt gebruik van standaardafvoergolven, die kunnen worden opgevat als afvoergolven die het gemiddelde tijdsverloop van de afvoergolven geven. De standaardafvoergolven zijn afgeleid met de zogenaamde golfvormgenerator [Klopstra, 1999ab]. Deze berekeningswijze houdt ruwweg in dat de kans dat tijdens de passage van een afvoergolf overbelasting optreedt, wordt gewogen met de frequentie per winterhalfjaar van de afvoergolven. De methode voor de hogere afvoergolven is (onder meer) toegepast in het project *Uniformering Belasting Waterkeringen* (UBW) [Duits, 1998]. De twee berekeningswijzen die in Hydra_b worden gebruikt vormen dus een combinatie van in principe reeds bekende berekeningsmethoden.

Zoals gezegd bedraagt de grenswaarde in Hydra_b $6000 \text{ m}^3/\text{s}$. De vraag ligt dan voor de hand in hoeverre de uitkomsten van Hydra_b afhankelijk zijn van de gekozen grenswaarde. Is het wellicht zo dat een andere keuze van de grenswaarde, bijvoorbeeld $8000 \text{ m}^3/\text{s}$, tot andere resultaten voor berekende waterstanden en kruinhoogten zou leiden? Als dat laatste het geval is, zou de conclusie zijn dat Hydra_b geen goed te beargumenteren model vormt voor de hier genoemde berekeningen. Hier dient wel te worden vermeld dat voor niet al te hoge grenswaarden zowel de berekeningswijze voor de lage als die voor de hoge afvoeren goed kan worden gemotiveerd, zie bijvoorbeeld [Geerse, 2000ab]. De verwachting is dus dat de keuze van de grenswaarde, mits niet te hoog gekozen, weinig invloed heeft op de uitkomsten.

In dit werkdocument wordt op twee manieren onderzocht wat de invloed van de grenswaarde is op de uitkomsten van waterstanden en kruinhoogten:

1. Voor vijf representatieve locaties op de riviertakken Waal – Merwede – Noord – Nieuwe Maas zijn waterstandsberekeningen gemaakt met Hydra_b voor verschillende grenswaarden en bij verschillende terugkeertijden. Deze locaties zijn Rotterdam, Dordrecht, Sliedrecht, Gorkum en Tiel. Rotterdam wordt voornamelijk door de zeewaterstand beïnvloed, Tiel door de Rijnafoer en de overige locaties door combinaties van zeewaterstand en rivierafvoer.
2. Er is een wiskundige afchatting afgeleid, die van toepassing is op waterstanden en kruinhoogten, waarmee de invloed van de grenswaarde kan worden afgeschat. De afchatting levert bovengrenzen voor de mate waarin een andere keuze van de grenswaarde in Hydra_b doorwerkt op de uitkomsten. Tevens geeft deze afchatting *inzicht in de factoren die van invloed zijn* op de mate waarin de grenswaarde van invloed is op de uitkomsten van de berekeningen.

De in punt (2) genoemde afchatting laat zien dat de belangrijkste factor die van invloed is op de uitkomsten voor verschillende grenswaarden de zogenaamde *getijkans* is. Deze getijkans is een functie van de afvoer en geeft, bij een gegeven vaste afvoer in een getijperiode, de kans dat tijdens deze getijperiode overbelasting optreedt. Iets preciezer gesteld geeft deze getijkans de kans dat een zeewaterstand, windsnelheid en windrichting optreden die in combinatie met de beschouwde afvoer tot overbelasting leiden in de betreffende getijperiode. De afchatting laat zien dat wanneer deze getijkans voor de beschouwde grenswaarden maar klein genoeg is, een andere keuze van de grenswaarde tot nauwelijks andere uitkomsten zal leiden. In essentie betekent dit dat de grenswaarde in Hydra_b zo laag moet zijn gekozen dat voor een afvoer gelijk aan de grenswaarde een tamelijk extreme zeestand en/of windsnelheid vereist is voor overbelasting. Indien namelijk bij de beschouwde afvoer betrekkelijk vaak optredende zeestanden en/of windsnelheden reeds tot overbelasting kunnen leiden, zal de

getijks vrij groot zijn, dat wil zeggen al redelijk dicht bij de waarde 1.0 liggen. Uit paragraaf 2.2 volgt dat voor deze situatie een andere keuze van de grenswaarde tot grote verschillen kan leiden in de uitkomsten. Het blijkt dat voor waterstandsberekeningen, voor terugkeertijden $T \geq 1250$ jaar, in ieder geval alle grenswaarden tussen de $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ en $12000 \text{ m}^3/\text{s}$ praktisch dezelfde uitkomsten zullen leveren. Voor kruinhoogteberekeningen geldt een soortgelijke conclusie voor grenswaarden tussen de $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ en $9000 \text{ m}^3/\text{s}$. Zie voor meer gedetailleerde uitspraken de conclusies in paragraaf 1.2. We merken verder op dat gelijktijdig met het schrijven van dit werkdocument ook in UBW-kader naar de invloed van de grenswaarde is gekeken [Vrouwenvelder, 2002]. Dat onderzoek is zojuist afgerond, en de resultaten betreffende de invloed van de grenswaarde stemmen overeen met de bevindingen in dit werkdocument.

In hoofdstuk 2 worden waterstandsberekeningen voor verschillende grenswaarden, uitgevoerd met Hydra_b, voor de eerder genoemde vijf locaties met elkaar vergeleken. Tevens worden de resultaten vergeleken met de bovengrenzen die resulteren uit de wiskundige afchatting. Dit hoofdstuk begint met een bespreking van de in Hydra_b gebruikte afvoerstatistiek. In hoofdstuk 3 wordt de wiskundige afchatting geformuleerd en het gebruik daarvan toegelicht aan de hand van twee voorbeelden. In hoofdstuk 4 wordt het bewijs van de afchatting gegeven. Tevens wordt daar nog ingegaan op een afchatting voor de getijks en op de verschillen tussen Hydra_b en de Deltamethode. Hoofdstuk 5 behandelt allerlei wiskundige details uit het bewijs van de afchatting.

Wat de moeilijkheidsgraad van dit rapport betreft het volgende. Hoofdstuk 2 zal door de meeste lezers die enigszins bekend zijn met Hydra_b begrepen kunnen worden. Voor een goed begrip van de hoofdstukken 3, 4 en 5 is echter een gedetailleerde kennis van de Hydra_b formules noodzakelijk, evenals een zeer gedegen wiskundige achtergrond. Verder merken we op dat het aanvankelijk door schrijver dezes niet nodig werd geacht het zeer gecompliceerde bewijs van de afchatting netjes op te schrijven. In een later stadium werd echter geoordeeld dat de afchatting dermate veel inzicht geeft in de problematiek van de grenswaarde dat het toch aanbeveling verdient het bewijs volledig uitgewerkt te rapporteren, wat geresulteerd heeft in het voorliggende werkdocument. Een bijkomend voordeel van (het bewijs van) de afchatting is dat de gebruikte bewijstechniek ook los van de afchatting van waarde is. Zo berusten de bewijzen van enkele formules uit [Geerse, 2002] op de in dit werkdocument gebruikte bewijstechnieken.

1.2 Conclusies

De belangrijkste conclusies uit dit werkdocument voor de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h)$ van waterstanden h (faalmechanisme overloop) en kruinhoogten h (faalmechanismes golfoverslag en golfploop) luiden als volgt.

Conclusies

1. Een *hogere* grenswaarde leidt in Hydra_b (afgezien van numerieke onnauwkeurigheden) altijd tot een *hogere* of minstens even hoge overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h)$ van niveau h .
2. Voor lagere niveaus h heeft een verandering van de grenswaarde in Hydra_b grotere gevolgen voor de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h)$ dan voor hogere niveaus h . Anders gezegd, voor lagere terugkeertijden heeft een verandering van de grenswaarde in Hydra_b grotere gevolgen voor de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h)$ dan voor hogere terugkeertijden.
3. Het verhogen van de grenswaarde in Hydra_b van $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ (defaultwaarde) naar $9000 \text{ m}^3/\text{s}$ levert, ingeval terugkeertijden $T \geq 1250$ jaar worden beschouwd, verschillen in *waterstanden* en *kruinhoogten* van in ieder geval minder dan 0.02 meter.
Deze uitspraak geldt voor iedere locatie in het Benedenrivierengebied met een decimeringswaarde kleiner dan 1.0 meter. Voor een locatie met een grotere of kleinere decimeringswaarde dan 1.0 meter resulteert een evenredig groter of kleiner verschil dan 0.02 meter; bijvoorbeeld voor een locatie met een decimeringswaarde van 0.5 meter resulteert een maximaal verschil van 0.01 meter. Voor de meeste, zo niet alle locaties zullen de verschillen vermoedelijk aanmerkelijk kleiner zijn dan de genoemde 0.02 meter.
4. Indien $T \geq 1250$ jaar en voor de grenswaarde q_g in Hydra_b geldt $6000 \text{ m}^3/\text{s} \leq q_g \leq 12000 \text{ m}^3/\text{s}$, zullen de uitkomsten voor de berekende *waterstanden* niet meer dan orde millimeters hoger uitvallen dan berekend met de standaard in Hydra_b gebruikte 'defaultwaarde' $q_g = 6000 \text{ m}^3/\text{s}$; voor de meeste locaties zullen de verschillen overigens nog kleiner zijn.

2 Vergelijking resultaten volgens Hydra_b en volgens de afchatting

In dit hoofdstuk worden voor vijf locaties waterstandsberekeningen, berekend met Hydra_b, gepresenteerd. De locaties zijn Rotterdam, Dordrecht, Sliedrecht, Gorkum en Tiel. De berekeningen worden gemaakt voor verschillende keuzes van de grenswaarde in Hydra_b. Omdat de locaties betrekkelijk representatief zijn voor het Benedenrivierengebied – Rotterdam wordt voornamelijk door de zee beïnvloed, Tiel door de afvoer en de overige locaties zowel door de zee als de afvoer – ontstaat zo een goede indruk van de mate waarin de keuze van de grenswaarde in Hydra_b van invloed is op waterstandsberekeningen. De berekeningen worden gemaakt voor verschillende terugkeertijden T , namelijk 5, 10, 100, 1250, 2000 en 10000 jaar.

Behalve met Hydra_b kan de invloed van de grenswaarde ook afgeschat worden met behulp van de in hoofdstuk 1 reeds genoemde wiskundige afchatting. De met de afchatting bepaalde getallen vormen een vrij nauwkeurige *boven grens* voor de verandering in de berekende waterstand die het gevolg is van een andere keuze van de grenswaarde. De afchatting is toegepast op dezelfde vijf locaties die hiervoor werden genoemd, maar slechts voor terugkeertijden corresponderend met de MHW-berekeningen.

In paragraaf 2.2 worden de Hydra_b resultaten en de resultaten volgens de afchatting met elkaar vergeleken en becommentarieerd. In paragraaf 2.1 worden eerst kort de kenmerken van de afvoerstatistiek beschreven. Onder meer wordt beknopt uitgelegd wat een *consistente afvoerstatistiek* inhoudt. Deze consistentie is cruciaal voor het verkrijgen van goede resultaten met Hydra_b.

2.1 Beknopte beschrijving van de afvoerstatistiek

We zullen kort de belangrijkste aspecten van de afvoerstatistiek beschrijven. Voor meer details wordt verwezen naar bijvoorbeeld [Kalk, 2001]. Al onze beschouwingen hebben hier slechts betrekking op de Rijn te Lobith; de Maas wordt in dit stuk niet behandeld. De volgende definities gelden, waarbij *whjaar* wordt gebruikt als afkorting van het winterhalfjaar van oktober t/m maart, bestaande in Hydra_b uit 182 dagen.

N getijden/whjaar

Aantal getijden per winterhalfjaar. $N = 352$ in Hydra_b.

$P(Q > q)$ -

Momentane kans van de afvoer. Dit is de kans dat de afvoer op een willekeurig gegeven moment de waarde q overschrijdt. Deze kans is tevens gelijk aan een tijdfractie, in de zin dat $P(Q > q)$ de fractie van de tijd geeft dat het niveau q wordt overschreden door de afvoer¹.

$\Psi(q)$ keren/ whjaar

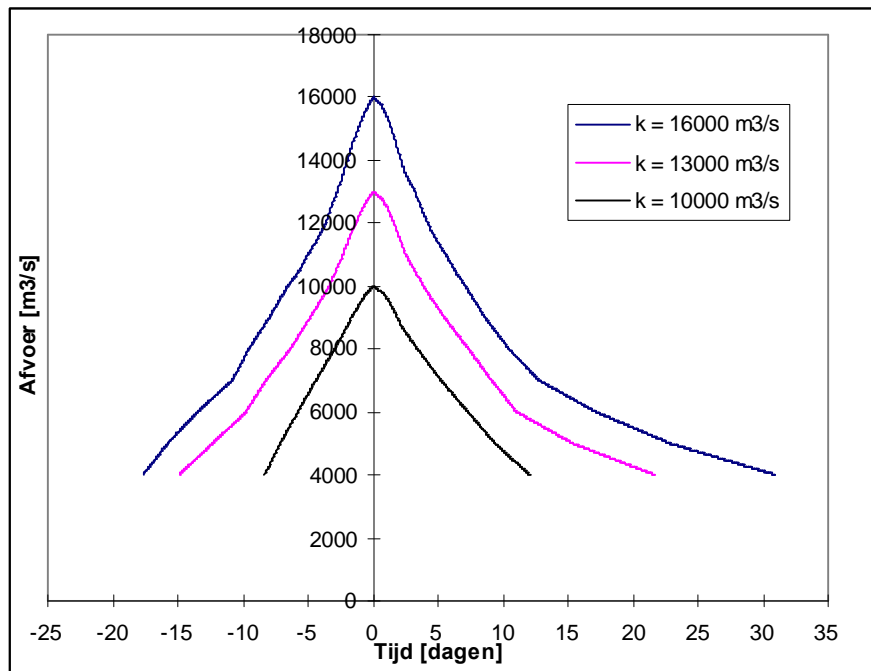
Overschrijdingsfrequentie van de afvoergolven (werklijn). Dit is het gemiddeld aantal keren per winterhalfjaar dat de tophoogte van een afvoergolf de waarde q overschrijdt. De werklijn is in Hydra_b voor de Rijn beschikbaar vanaf de eens per jaar afvoer.

Uiteraard geldt dat de overschrijdingsfrequentie $\Psi(q)$ van de afvoer q gelijk is aan het omgekeerde van de terugkeertijd $T(q)$, ofwel $\Psi(q) = 1/T(q)$. Het verband tussen terugkeertijd en afvoer wordt in Hydra_b gegeven door

$$\begin{aligned} q(T) &= 1620.7 \ln(T) + 5893.3 \quad \text{m}^3/\text{s} & 1 \leq T \leq 2 \\ (3.1) \quad \text{Lobith: } q(T) &= 1517.78 \ln(T) + 5964.63 \quad \text{m}^3/\text{s} & 2 \leq T \leq 25 \\ q(T) &= 1316.43 \ln(T) + 6612.61 \quad \text{m}^3/\text{s} & 25 \leq T \leq 10000 \end{aligned}$$

¹ In feite dient gespecificeerd te worden welke afvoer eigenlijk wordt bedoeld. Betreft het een gemiddelde dagafvoer, een 8:00 uur waarde, een dagmaximum of nog wat anders. In de afleiding van de afvoerstatistiek lopen de interpretaties van het begrip *afvoer* vaak door elkaar heen, zie bijvoorbeeld [Geerse, 2001]. In het kader van dit stuk is het niet relevant aan welke afvoer precies gedacht moet worden. Men kan eenvoudig denken aan de afvoer q als een representatieve waarde voor de afvoer gedurende een getijperiode. In dit stuk wordt de term dagenlijn van de afvoer vermeden, omdat in de formules de natuurlijke tijdseenheid een getijperiode is en geen dag.

Naast de werklijn en de momentane kans worden in Hydra_b standaardafvoergolven gebruikt, welke kortweg worden aangeduid als afvoergolven of als golfvormen. Deze zijn afkomstig uit de zogenaamde golfvormgenerator, zie [Klopstra, 1999ab] en [Geerse, 2001]. Figuur 2.1 geeft enkele van deze afvoergolven.



Figuur 2.1 Drie standaardafvoergolven voor de Rijn te Lobith met tophoogtes 10000, 13000 en 16000 m³/s.

De werklijn, momentane kans en de golfvormen hangen met elkaar samen. Wanneer de werklijn en de golfvormen bekend zijn, kan namelijk de momentane kans worden uitgerekend. Immers, wanneer de (gemiddelde) vorm van de afvoergolven bekend is, en tevens de frequentie waarmee de golven voorkomen, dan ligt daarmee de fractie van de tijd $P(Q > q)$, welke de momentane kans vormt, volledig vast. Ten behoeve van Hydra_b is $P(Q > q)$ voor $T \geq 1$ jaar bepaald op basis van de werklijn en de golfvormen, terwijl voor $T < 1$ jaar $P(Q > q)$ direct is bepaald uit de waarnemingen, zie voor meer details [Kalk, 2001]. Wanneer de werklijn, momentane kans en de golfvormen op de juiste wijze samenhangen wordt gewoonlijk gezegd dat de afvoerstatistiek *consistent* is. Een niet-consistente statistiek zou dus inhouden dat de gebruikte gegevens strijdig zijn met elkaar. De afvoerstatistiek uit Hydra_b voldoet uiteraard aan de hier genoemde consistentie. Aan deze consistentie wordt ook voldaan in het programma Dijkkring, zie [Den Heijer, 1994] en [Volker, 1989].

Een zinnige grootheid om te beschouwen is de gemiddelde duur $d(q)$ van overschrijdingsniveau q binnen een afvoergolf met een tophoogte groter dan q . Deze duur speelt namelijk een rol in de vergelijking van Hydra_b met de berekeningswijze van MHW's die indertijd reeds door de Deltacommissie werd toegepast, waarover later meer in paragraaf 4.2. Deze duur wordt gegeven door

$$(3.2) \quad d(q) = \frac{NP(Q > q)}{\Psi(q)}$$

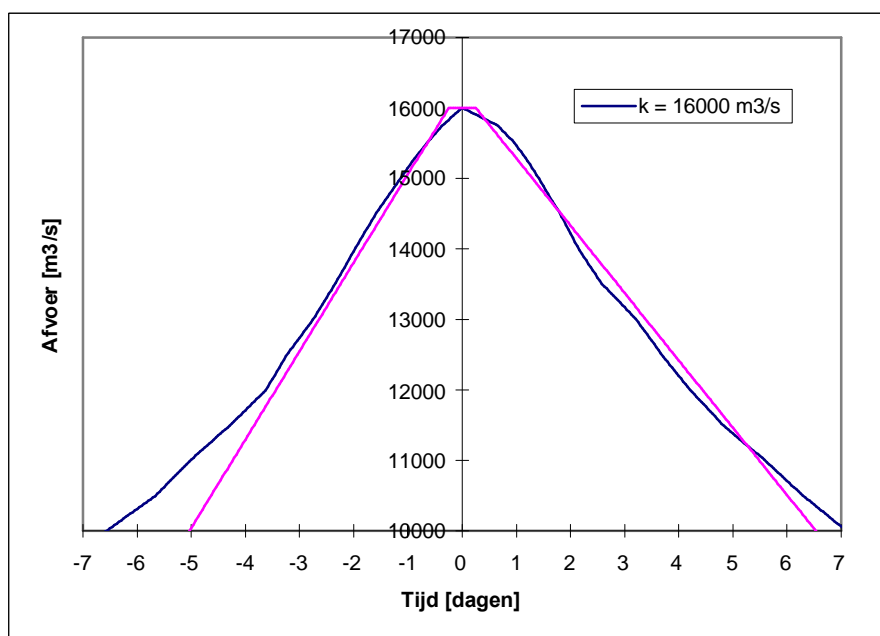
Ter illustratie van deze formule het volgende voorbeeld. De afvoer $q = 7000$ m³/s heeft volgens (3.1) een frequentie $\Psi(q) = 0.5$ keren/whjaar, en komt dus gemiddeld eens per twee jaar voor. Dit is dus de frequentie van afvoergolven waarvan de tophoogtes de waarde 7000 m³/s overschrijden. Het afvoerniveau $q = 7000$ m³/s blijkt volgens de Hydra_b gegevens een momentane overschrijdingskans $P(Q > q) = 0.016$ te hebben, wat inhoudt dat gedurende 1.6% van de tijd deze afvoer wordt overschreden. Dit afvoerniveau wordt dan gedurende $N P(Q > q) = 352 \cdot 0.016 = 5.63$ getijden/whjaar overschreden. De gemiddelde duur dat het niveau $q = 7000$ m³/s binnen de beschouwde afvoergolven wordt overschreden moet dan gelijk zijn aan $5.63/0.5 = 11.3$ getijden. Als zo'n afvoergolf passeert, dan duurt de overschrijding van het beschouwde niveau binnen één zo'n golf dus gemiddeld deze 11.3 getijden. Tabel 2.1 geeft $d(q)$ voor een aantal afvoerniveaus. Zoals verwacht neemt $d(q)$ af met

toenemende afvoer. Bij de eens per jaar afvoer van ongeveer $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ bedraagt $d(q)$ ongeveer 11 getijden, terwijl deze duur bij de maatgevende afvoer van $16000 \text{ m}^3/\text{s}$ is afgenomen tot circa 5 getijden.

Het meest relevante hogere deel van de afvoergolven blijkt goed te kunnen worden benaderd door een trapezium met een topduur van 1 á 2 getijden en een basisduur (op het nulniveau van de afvoer) van circa 60 getijden. Zie ter illustratie figuur 2.1 en 2.2. In de laatste figuur is de maatgevende golf afgebeeld tezamen met een trapezium met een basisduur van 30 dagen en een topduur van 1 getijperiode. De benadering van afvoergolven door dergelijke trapezia speelt een belangrijke rol in de beschouwingen in dit rapport. Zie voor een nadere beschouwing van afvoergolven in relatie tot trapezia [Geerse, 2002].

Lobith			Lith		
afvoer q [m ³ /s]	duur d(q) binnen afvoergolf [getijden]	duur d(q) binnen afvoergolf [dagen]	afvoer q [m ³ /s]	duur d(q) binnen afvoergolf [getijden]	duur d(q) binnen afvoergolf [dagen]
6000	11.7	6.0	1250	11.2	5.8
7000	10.3	5.3	1500	9.8	5.1
8000	9.3	4.8	1750	8.2	4.2
9000	8.4	4.3	2000	7.3	3.8
10000	7.5	3.9	2250	6.9	3.6
11000	6.7	3.5	2500	6.8	3.5
12000	6.3	3.2	2750	6.6	3.4
13000	5.9	3.1	3000	6.1	3.1
14000	5.6	2.9	3250	5.5	2.9
15000	5.3	2.7	3500	5.3	2.7
16000	5.0	2.6	3750	5.2	2.7
17000	4.8	2.5	4000	5.0	2.6
18000	4.6	2.4	4250	4.8	2.5

Tabel 2.1 De gemiddelde duur $d(q)$ binnen een afvoergolf voor Lobith en voor Lith.



Figuur 2.2 De maatgevende afvoergolf benaderd door een trapezium met een topduur van 1 getijperiode. De basis van het trapezium heeft een duur van 30 dagen (bij het basisniveau van afvoer $0 \text{ m}^3/\text{s}$), en loopt van $t = -13$ tot $t = +17$ dagen.

2.2 Invloed van de grenswaarde volgens Hydra_b en volgens de afschatting

In deze paragraaf wordt verondersteld dat de lezer globaal op de hoogte is van de Hydra_b formules en van de rol die de grenswaarde daarin speelt. Hoewel in deze paragraaf de gedetailleerde formules niet nodig zijn, geven we het meest relevante deel van de Hydra_b formules hier beknopt weer, zie voor meer details [Geerse, 2000b].

De overschrijdingsfrequentie van kruinhoogte h , beschouwd voor het faalmechanisme overloop, golfoverslag of golfoverloop, wordt gegeven door

$$(3.3) \quad \Psi_H(h) = \Psi_H(h; Q \text{ laag}) + \Psi_H(h; Q \text{ hoog})$$

De bijdragen aan de overschrijdingsfrequentie voor de lage en hoge afvoeren worden respectievelijk gegeven door

$$(3.4) \quad \Psi_H(h; Q \text{ laag}) = N \int_0^{q_g} dq g(q) P(H_q > h)$$

$$(3.5) \quad \Psi_H(h; Q \text{ hoog}) = \int_{q_g}^{\infty} dk \psi(k) P(F | k, q_g)$$

De grootheden hebben de volgende betekenis.

$\Psi_H(h)$ 1/whjaar
Gemiddeld aantal keren per winterhalfjaar dat overbelasting van kruinhoogte h plaatsvindt.

$\Psi_H(h; Q \text{ laag})$ 1/whjaar
Gemiddeld aantal keren per winterhalfjaar dat overbelasting van kruinhoogte h plaatsvindt bij lage afvoeren $Q < q_g$.

$\Psi_H(h; Q \text{ hoog})$ 1/whjaar
Gemiddeld aantal keren per winterhalfjaar dat overbelasting van kruinhoogte h plaatsvindt bij hoge afvoeren $Q > q_g$.

N getijden/whjaar
Aantal getijperioden in een winterhalfjaar. $N = 182 \cdot 24 / 12.42 = 352$.

q_g m³/s
Grenswaarde in het model Hydra_b die de lage en hoge afvoeren scheidt.

$g(q)$ s/m³
Momentane kansdichtheid van de afvoer.

$\psi(k)$ s/(jaar.m³)
Frequentiedichtheid van de afvoertoppen: $\psi(k) = -d\Psi(k)/dk$.

$P(H_q > h)$
Kans dat gedurende één getijperiode, bij gegeven vaste afvoer q , het belastingsniveau h wordt overschreden.

$P(F | k, q_g)$
Kans dat gedurende de passage van de afvoergolf met tophoogte k falen optreedt. Falen, aangeduid als F , staat hier voor het één of meer keer optreden van overbelasting van kruinhoogte h tijdens de passage, gedurende de tijdsduur dat de golf zich boven niveau q_g bevindt.

De formule voor $P(F | k, q_g)$ wordt in hoofdstuk 3 gegeven. De grootheid $P(H_q > h)$ zal in dit stuk worden aangeduid als de *getijkans*. Deze grootheid speelt een prominente rol in dit stuk, maar de preciese berekening daarvan is voor dit stuk niet relevant, vandaar dat de formule hiervoor hier niet wordt gegeven. Hieronder zal

wel deze getijtkans nader worden toegelicht, maar eerst volgen de resultaten voor Hydra_b berekeningen voor vijf locaties.

Locatiegegevens			
locatie	X - coörd.	Y - coörd.	plaats
Rotterdam	94160	436720	MSW-station, km 999
Dordrecht	105610	426090	MSW-station, km 976
Sliedrecht	113545	425340	Beneden Merwede km 968
Gorkum	126183	426182	Boven Merwede km 955
Tiel	158676	432610	Waal km 915

Tabel 2.2 Locatiegegevens voor de met Hydra_b gemaakte berekeningen.

Om de invloed van de grenswaarde te illustreren zijn in tabel 2.3 voor de locaties Rotterdam, Dordrecht, Sliedrecht, Gorkum en Tiel waterstandsberekeningen gegeven voor verschillende grenswaarden en terugkeertijden. Beschouwd zijn de grenswaarden 6000, 8000, 12000, 16000, 18000 m³/s en terugkeertijden T = 5, 10, 100, 1250, 2000 en 10000 jaar. Daarnaast zijn de resultaten weergegeven voor de Deltamethode, wat inhoudt dat in de Hydra_b formule $q_g = \infty$ is genomen; daarbij is de berekeningsmethode voor de lage afvoeren dus toegepast op het *gehele* bereik van afvoeren. De preciese locatiegegevens zijn vermeld in tabel 2.2. De getallen in tabel 2.3 zijn in millimeters gegeven, wat een schijnnaauwkeurigheid inhoudt. Alleen iets andere discretisaties in de numerieke berekeningen kunnen al tot ongeveer een centimeter verschil leiden in de uitkomsten. Verder bestaan allerlei onzekerheden in bijvoorbeeld de maatgevende afvoer, de duur van de opzet in de gebruikte Sobeksommen, de faalkans van de keringen etcetera. Dat de getallen in millimeters worden gegeven is gedaan om zo zuiver mogelijk de verschillende uitkomsten te kunnen vergelijken².

Beschouw als uitleg van tabel 2.3 locatie Sliedrecht. Deze locatie heeft een MHW van $h = 3.481 \text{ m} + \text{NAP}$ (T = 2000 jaar), zoals berekend met Hydra_b met $q_g = 6000 \text{ m}^3/\text{s}$. Het verhogen van de grenswaarde tot 12000 m³/s levert een 0.001 m hogere uitkomst. Een forse verhoging van de grenswaarde (ter informatie: 6000 m³/s heeft T = 1 jaar en 12000 m³/s heeft T = 60 jaar) levert dus niet meer dan een millimeter verschil in de uitkomst van de Hydra_b berekeningen. Pas bij een zeer forse verhoging van de grenswaarde ontstaan verschillen voor deze locatie; zo levert $q_g = 18000 \text{ m}^3/\text{s}$ een verhoging van het MHW met 0.035 m. Voor lagere terugkeertijden heeft een verandering van de grenswaarde meer invloed. Bijvoorbeeld voor T = 5 jaar en $q_g = 12000 \text{ m}^3/\text{s}$ resulteert een 0.113 m hogere uitkomst. Voor Sliedrecht geeft de grenswaarde 12000 m³/s bij de beschouwde lage terugkeertijden dus geen goede resultaten voor waterstandsberekeningen, omdat de fout nu ongeveer één decimeter bedraagt. De iets lagere grenswaarde 8000 m³/s levert bij deze lage terugkeertijden weer een veel kleiner verschil van ongeveer één centimeter. De grenswaarde 8000 m³/s geeft dus voor Sliedrecht nagenoeg dezelfde resultaten als de defaultwaarde in Hydra_b. De tabel laat zien dat voor $T \geq 5$ jaar voor alle vijf locaties een grenswaarde $q_g = 8000 \text{ m}^3/\text{s}$ praktisch dezelfde uitkomsten geeft als de defaultwaarde. Het maximale verschil bij deze locaties treedt op bij Gorkum en bedraagt 0.027 m.

Voor MHW-berekeningen worden altijd terugkeertijden $T \geq 1250$ jaar beschouwd. Laten we deze terugkeertijden eens in combinatie met de grenswaarde 12000 m³/s beschouwen. In dat geval treedt het maximale verschil voor de vijf locaties op bij de locaties Dordrecht en Sliedrecht, welk verschil dan slechts één millimeter bedraagt. Er is (op dit moment) niet verder onderzocht bij welke km-raai op de rivier nu precies het maximale verschil optreedt. Omdat de vijf beschouwde locaties verschillend van karakter zijn – Rotterdam wordt gedomineerd door de zeewaterstand, Tiel door de afvoer en de overige locaties door combinaties van zeewaterstand en afvoer – zullen elders op de rivier niet veel grotere verschillen ontstaan.

² Wanneer de invloed van de grenswaarde wordt onderzocht dient de discretisatie-stapgrootte in de lage en de hoge afvoer in Hydra_b gelijk aan elkaar te worden genomen.

Hydra_b berekeningen van waterstanden voor verschillende grenswaarden.							
Aangegeven zijn de verschillen met Hydra_b t.o.v. defaultgrenswaarde 6000 m ³ /s in Hydra_b.							
Positief verschil houdt in dat de berekening hoger uitvalt dan die met 6000 m ³ /s.							
Voor 6000 m ³ /s waterstand in m + NAP. Overige getallen in m.							
T [jaar]	5	10	100	1250	2000	10000	
Rotterdam km 999 maximum							
6000	2.741	2.854	3.120	3.306	3.334	3.434	
8000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
16000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
18000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Deltameth.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Dordrecht km 976 maximum							
6000	2.194	2.302	2.629	2.950	3.006	3.215	
8000	0.005	0.004	0.001	0.000	0.000	0.001	0.005
12000	0.017	0.012	0.004	0.001	0.001	0.001	0.017
16000	0.026	0.017	0.006	0.001	0.001	0.002	0.026
18000	0.028	0.020	0.007	0.001	0.001	0.002	0.028
Deltameth.	0.028	0.020	0.007	0.002	0.001	0.002	0.028
Sliedrecht km 968 maximum							
6000	2.326	2.468	2.924	3.400	3.481	3.745	
8000	0.012	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000	0.012
12000	0.113	0.071	0.010	0.000	0.001	0.000	0.113
16000	0.182	0.172	0.106	0.012	0.007	0.001	0.182
18000	0.185	0.177	0.151	0.057	0.035	0.005	0.185
Deltameth.	0.186	0.177	0.163	0.155	0.156	0.169	0.186
Gorkum km 955 maximum							
6000	3.419	3.781	4.756	5.743	5.923	6.550	
8000	0.027	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.027
12000	0.736	0.535	0.004	0.000	0.000	0.000	0.736
16000	0.872	0.755	0.530	0.038	0.002	0.000	0.872
18000	0.877	0.765	0.612	0.367	0.278	0.000	0.877
Deltameth.	0.878	0.768	0.635	0.588	0.581	0.571	0.878
Tiel km 915 maximum							
6000	8.882	9.284	10.409	11.390	11.579	12.226	
8000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12000	0.871	0.645	0.000	0.000	0.000	0.000	0.871
16000	1.017	0.902	0.557	0.012	0.000	0.000	1.017
18000	1.023	0.914	0.636	0.391	0.289	0.000	1.023
Deltameth.	1.024	0.916	0.658	0.614	0.607	0.576	1.024

Tabel 2.3 Waterstandsberekeningen met Hydra_b voor verschillende grenswaarden³.

³ De getallen zijn berekend met rekenmodule versie 1.4, met de sluitfunctie van eind december 2001 (Rijnsom) en de uitgebreide dagenlijn van 7 januari 2002. De discretisaties zijn hetzelfde als voor de eind december 2001 opgeleverde randvoorwaarden, alleen voor Rotterdam is de maximale afvoer 25000 i.p.v. 20000 m³/s genomen, met stapgrootte 250 m³/s in lage zowel als hoge afvoer. Tevens zijn extra hulpdijkhoogtes toegevoegd, zodat nergens geïnterpoleerd hoefde te worden. Voor de Deltamethode is de grenswaarde op 25000 m³/s gezet.

In hoofdstuk 3 zal een wiskundige afchatting, zie (3.13), worden besproken waarmee zonder gedetailleerde berekeningen de invloed van de grenswaarde kan worden geschat. Het bewijs van de afchatting is zeer complex en wordt gegeven in hoofdstuk 4 en 5. In feite is deze afchatting al veel eerder afgeleid dan dat de berekeningen in tabel 2.3 konden worden uitgevoerd. Omdat het volledige bewijs van de afchatting zo gecompliceerd is, is aanvankelijk het bewijs niet netjes opgeschreven. In een later stadium werd echter geoordeeld dat de afchatting dermate veel inzicht geeft in de problematiek van de grenswaarde dat toch besloten is het bewijs volledig uitgewerkt te rapporteren, wat geresulteerd heeft in het voorliggende rapport. Een belangrijk punt is tevens dat de afchatting duidelijk maakt dat de keuze van de grenswaarde, mits niet te hoog gekozen, niet alleen geen invloed heeft op de uitkomsten voor waterstandsberekeningen, maar eveneens geen invloed heeft op de uitkomsten voor de kruinhoogte berekeningen (voor de faalmechanismes golfoverslag en golfoploop). Berekeningen van het laatste type zijn, uitgezonderd testberekeningen, op dit moment nog niet met Hydra_b gemaakt. Een bijkomend voordeel van (het bewijs van) de afchatting is dat de gebruikte bewijstechniek ook los van de afchatting van waarde is. Zo berusten de bewijzen van enkele formules uit [Geerse, 2002] op de in dit rapport beschouwde 'variant op de Regel van Leibniz' die in hoofdstuk 4 en 5 aan de orde komt. Verder melden we nog dat (afgezien van numerieke onnauwkeurigheden in Hydra_b) de afchatting aangeeft dat een hogere grenswaarde altijd tot een hogere, of minstens even hoge, overschrijdingsfrequentie leidt. Samengevat, de wiskundige afchatting is ten eerste belangrijk omdat hij inzicht geeft in de mate waarop een andere keuze van de grenswaarde doorwerkt in waterstands- en kruinhoogteberekeningen en ten tweede omdat de ten behoeve van de afchatting gebruikte bewijstechnieken ook elders van waarde kunnen zijn. Daarnaast geeft de afchatting aan dat een hogere grenswaarde altijd tot een hogere (of minstens even hoge) overschrijdingsfrequentie leidt.

De grootte die een centrale rol speelt in de afchatting is de al eerder genoemde getijkans $P(H_q > h)$. Omwille van de eenvoud zullen we ons in het vervolg slechts beperken tot MHW-berekeningen. In dat geval stelt h een waterstand voor, beschouwd bij een terugkeertijd T gelijk aan de voor de betreffende locatie geldende normfrequentie. De getijkans $P(H_q > h)$ geeft dan de kans dat in een getijperiode (met een duur van 12 uur en 25 minuten) waarin de gemiddelde Rijnaafvoer gelijk is aan $q \text{ m}^3/\text{s}$ het MHW van $h + \text{NAP}$ wordt overschreden. In tabel 2.4 worden de getijkansen voor de eerder genoemde vijf locaties gegeven voor de grenswaarden 2000, 6000, 8000, 12000, 16000 en 18000 m^3/s . Beschouw als uitleg van de tabel de getijkans voor Dordrecht voor $q = 8000 \text{ m}^3/\text{s}$ en het MHW van $h = 3.006 + \text{NAP}$. Daarvoor is $P(H_q > h) = 0.0001$. Dat wil zeggen dat bij een Rijnaafvoer van $8000 \text{ m}^3/\text{s}$ tijdens een getijperiode de kans dat de waterstand het MHW overschrijdt tijdens deze getijperiode gelijk is aan 0.0001. Iets specifiek, de kans dat bij deze afvoer een stormvloed op zee optreedt (of kort daarvoor is opgetreden), die in combinatie met de opgetreden windsnelheid en opgetreden windrichting tot overschrijden van het MHW leidt in de beschouwde getijperiode, is 0.0001.

De getijkansen in de tabel zijn berekend met Hydra_b, met de kanttekening dat de getallen in wetenschappelijke notatie ruwweg uit tussenresultaten van Hydra_b zijn bepaald. Hydra_b levert de getijkansen namelijk slechts in vier decimalen. Omdat voor de hier relevante doeleinden de getijkansen slechts in zeer ruwe benadering bekend hoeven te zijn, is het geen probleem dat de kansen niet alle exact bekend zijn. We merken op dat sommige van de getijkansen uit de tabel ook op basis van ervaring goed zijn te schatten. De reeds genoemde kans voor Dordrecht van 0.0001 kan bijvoorbeeld worden geschat op basis van de ervaringskennis dat bij een afvoer van $8000 \text{ m}^3/\text{s}$ te Dordrecht een zeestand van circa $3.0 + \text{NAP}$ vereist is voor overschrijding van het MHW. Die zeestand heeft volgens de RIKZ-statistiek een terugkeertijd van ongeveer $T = 13$ jaar, ofwel een frequentie van $1/13$ per winterhalfjaar. Omdat zo'n verhoogde zeestand hooguit één getijperiode aanhoudt, is de kans dat deze $3.0 + \text{NAP}$ in een getijperiode optreedt dan ongeveer $1/13 \cdot 1/352 = 0.0002$, wat redelijk dicht in de buurt ligt van de exact met Hydra_b bepaalde 0.0001. Terzijde merken we nog op dat de getijkansen van Rotterdam voor elke beschouwde afvoer kleiner zijn dan $5 \cdot 10^{-4}$, waaruit blijkt dat de afvoer voor Rotterdam geen grote rol speelt voor het optreden van MHW, hetgeen bij de meeste lezers overigens bekend zal zijn. Merk tevens op dat de getijkansen toenemen bij toenemende afvoer, wat ook verwacht moet worden, omdat bij een hogere afvoer de kans op overschrijden van het MHW groter wordt. Voor de zeer sterk door de afvoer bepaalde locatie Tiel, met $T = 1250$ jaar, neemt de getijkans vrij abrupt toe van 0 tot 1 rond de maatgevende afvoer van $16000 \text{ m}^3/\text{s}$. Iets beneden de maatgevende afvoer is de getijkans praktisch 0, terwijl deze iets boven de maatgevende afvoer gelijk aan 1 wordt. Indien Tiel *uitsluitend* door de afvoer zou worden bepaald, wat nu niet het geval is omdat toch enige windopzet en zee-invloed aanwezig is, zou de getijkans discontinu van 0 naar 1 springen bij de maatgevende afvoer.

In tabel 2.4 worden naast de normfrequentie en het MHW voor de betreffende locaties ook de decimeringswaarden van de waterstanden gegeven. De decimeringswaarde is het bedrag waarmee de waterstand verandert wanneer de beschouwde terugkeertijd met een factor 10 verandert. Neem Dordrecht, met decimeringswaarde 0.30 m als voorbeeld. Het MHW, bij $T = 2000$ jaar, bedraagt (afgerond op centimeters) 3.01

m+NAP. Dan zal $T = 200$ jaar een waterstand te zien geven van $3.01 - 0.30 = 2.71$ m+NAP. We merken wel op dat het begrip decimeringswaarde slechts goed gedefinieerd is ingeval de waterstand h exact logaritmisch samenhangt met T , dus indien $h = a \log T + b$, hetgeen in de hier beschouwde situaties vrij goed klopt. De constante a is gelijk aan de decimeringswaarde. In het voorbeeld voor Dordrecht geldt $h = 0.30 \log T + 2.016$. Merk op dat indien voor twee terugkeertijden T_1 en T_2 de respectievelijke waterstanden h_1 en h_2 bekend zijn, de a en b bepaald kunnen worden. De decimeringswaarde volgt dan uit

$$(3.6) \quad a = \frac{h_2 - h_1}{\log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

en de constante uit

$$(3.7) \quad b = \frac{h_1 \log T_2 - h_2 \log T_1}{\log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Omdat in de hier beschouwde toepassingen het logaritmische verband niet exact geldt, is de berekende decimeringswaarde (enigszins) afhankelijk van de keuze van T_1 en T_2 . De decimeringswaarden in tabel 2.4 zijn bepaald uit de gegevens in tabel 2.3 met de keuzes $T_1 = 2000$ en $T_2 = 10000$ jaar.

locaties:	Rotterdam	Dordrecht	Slidrecht	Gorkum	Tiel
T [jaar]	10000	2000	2000	2000	1250
MHW [m+NAP]	3.434	3.006	3.481	5.923	11.390
decim. [m]	0.14	0.30	0.38	0.90	0.93
afvoer [m3/s]	getijkansen [-]				
2000	1E-06	5E-08	1E-09	0	0
6000	1E-06	1E-07	1E-07	0	0
8000	5E-06	0.0001	1E-05	1E-11	0
12000	1E-05	0.0005	0.0002	1E-07	1E-12
16000	3E-05	0.0025	0.0266	0.0090	0.2688
18000	5E-05	0.0065	0.3285	1.0000	1.0000

Tabel 2.4 Getijkansen voor verschillende afvoerniveaus onder MHW omstandigheden.

Bovengrenzen voor verschil t.o.v. defaultberekening met 6000 m3/s					
locaties:	Rotterdam	Dordrecht	Slidrecht	Gorkum	Tiel
MHW [m+NAP]	3.434	3.006	3.481	5.923	11.390
grenswaarde [m3/s]	bovengrenzen [m]				
2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
12000	0.0000	0.0025	0.0013	0.0000	0.0000
16000	0.0001	0.0165	0.1691	0.1633	1.4865
18000	0.0002	0.0429	0.6549	2.3044	2.2289

Tabel 2.5 Bovengrenzen voor het verschil tussen de berekening met de weergegeven grenswaarde en de berekening met de defaultgrenswaarde 6000 m³/s, zoals berekend met de in de tekst genoemde afschatting.

We zullen nu tabel 2.5 uitleggen. Neem Dordrecht als voorbeeld. Deze locatie heeft een MHW van 3.006 m+NAP, welke is uitgerekend met Hydra_b met de defaultgrenswaarde 6000 m³/s. Met behulp van de eerder

genoemde wiskundige afchatting kan worden afgeschat dat een verhoging van de grenswaarde in Hydra_b naar $8000 \text{ m}^3/\text{s}$ het (berekende) MHW met hooguit 0.0002 m doet toenemen. Dus de Hydra_b berekeningen voor de grenswaarden $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ en $8000 \text{ m}^3/\text{s}$ geven praktisch hetzelfde antwoord. Tabel 2.5 laat verder zien dat een grenswaarde $12000 \text{ m}^3/\text{s}$ een uitkomst levert die hooguit 0.0025 m hoger uitkomt. Merk op dat voor de overige locaties in tabel 2.5 voor grenswaarde $12000 \text{ m}^3/\text{s}$ de verschillen kleiner zijn dan 0.0025 meter . De getallen in tabel 2.5 vormen *bovengrenzen* voor de verschillen tussen de berekeningen. Het werkelijke verschil tussen de uitkomsten kan kleiner zijn. Zo geeft de Hydra_b berekening met grenswaarde $12000 \text{ m}^3/\text{s}$ voor Dordrecht volgens tabel 2.3 een waterstand van $3.007 \text{ m}+\text{NAP}$, wat een verschil met de defaultberekening inhoudt van slechts 0.001 m , terwijl tabel 2.5 voor deze locatie een bovengrens geeft van 0.0025 m . Deze bovengrens ligt in dit geval dus aardig in de buurt van het werkelijke verschil van 0.001 m .

Alvorens het betoog te vervolgen maken we de volgende opmerking over (het gebruik van) de wiskundige afchatting. De afchatting is wiskundig exact afgeleid (onder milde voorwaarden) en levert informatie over de manier waarop de afgeleide van de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h) = \Psi_H(h, q_g)$ naar de grenswaarde q_g zich gedraagt. Het gebruik van de afchatting om tot de bovengrenzen van tabel 2.5 te komen is echter toch enigszins pragmatisch, omdat bij het beschouwen van twee grenswaarden $q_{g,1}$ en $q_{g,2}$ de verandering van $\Psi_H(h, q_g)$ over het interval $[q_{g,1}, q_{g,2}]$ wordt berekend als $(q_{g,12} - q_{g,1})$ maal de afgeleide van $\Psi_H(h, q_g)$ naar q_g , geëvalueerd in het midden van het interval. Dat is een goede benadering indien deze afgeleide niet al te zeer varieert over het beschouwde interval. Het gebruik van de afchatting wordt in hoofdstuk 3 toegelicht aan de hand van een voorbeeld voor Dordrecht. Globaal kan worden gesteld dat indien de afchatting een kleine invloed van de grenswaarde op het MHW aangeeft, dus indien de bepaalde bovengrens klein is (zeg kleiner dan $0.05 \text{ m} \hat{=} 0.1 \text{ m}$), deze bovengrens betrouwbaar is, terwijl dat niet meer het geval hoeft te zijn indien de berekende bovengrens groot blijkt te zijn. De bovengrenzen in tabel 2.5 voor $8000 \text{ m}^3/\text{s}$ en $12000 \text{ m}^3/\text{s}$ zijn betrouwbaar, terwijl de bovengrenzen voor Sliedrecht, Gorkum en Tiel voor grenswaarde $16000 \text{ m}^3/\text{s}$ niet meer betrouwbaar hoeven te zijn. (Overigens blijken de bovengrenzen voor de laatstgenoemde locaties wel degelijk in overeenstemming met tabel 2.3.) Het feit dat voor grote bovengrenzen de afchatting geen betrouwbare bovengrenzen oplevert is jammer, maar niet echt een probleem. Zolang de afchatting kleine bovengrenzen levert, weten we dat de beschouwde grenswaarde niet veel invloed heeft op de uitkomsten. In deze laatste situatie, die samengaat met niet al te extreem hoge grenswaarden, zijn we juist geïnteresseerd.

We vervolgen nu ons betoog. Hiervoor werd gesteld dat de getijkans de belangrijkste grootheid is die een rol speelt in de afchatting. De afchatting laat namelijk zien dat de invloed van de grenswaarde op de uitkomsten kleiner wordt naarmate de getijkans kleiner wordt. Inderdaad laten tabel 2.4 en 2.5 zien dat een kleinere getijkans een kleinere bovengrens oplevert. Hoe klein de getijkans moet zijn om een kleine bovengrens op te leveren hangt niet alleen af van de getijkans, maar ook, zij het in mindere mate, van de beschouwde grenswaarde, de beschouwde terugkeertijd T en van de decimeringswaarde van de betreffende locatie. Voor MHW-omstandigheden blijkt een getijkans van orde 0.01 al 'zeer groot', in de zin dat dan al een bovengrens kan ontstaan van orde decimeters. Zie bijvoorbeeld de gegevens voor Gorkum voor grenswaarde $16000 \text{ m}^3/\text{s}$ en $T = 2000$ jaar, waar een getijkans van 0.009 een bovengrens van 0.1633 oplevert. Overigens geeft de Hydra_b berekening in dit geval slechts een verschil van 0.002 meter . De bovengrens geeft hier dus een veel te pessimistische indruk van het werkelijke verschil in uitkomsten tussen de Hydra_b berekening met de defaultwaarde en die met grenswaarde $16000 \text{ m}^3/\text{s}$.

Tot nu toe zijn steeds waterstandsberekeningen (faalmechanisme overloop) beschouwd. De afchatting is echter ook geldig voor kruinhoogteberekeningen (faalmechanismes golfoverslag en golfoploop). Het volgende is van toepassing op waterstanden zowel als kruinhoogten. Beschouw grenswaarde $9000 \text{ m}^3/\text{s}$, terugkeertijden $T \geq 1250$ jaar en decimeringswaarden van maximaal 1.0 meter . In paragraaf 4.3 zal worden aangetoond, zie (4.43), dat voor deze omstandigheden de getijkans voor afvoer $9000 \text{ m}^3/\text{s}$, ofwel $P(H_{q=9000} > h)$, altijd kleiner zal zijn dan 0.001 . Dan kan worden geverifieerd met behulp van afchatting (3.13) dat altijd bovengrenzen kleiner dan 0.02 m resulteren⁴. Voor kleinere decimeringswaarden resulteren evenredig kleinere bovengrenzen en voor grotere decimeringswaarden resulteren evenredig grotere bovengrenzen. We merken op dat de decimeringswaarden van de *waterstanden* in het Benedenrivierengebied in ieder geval nergens de 1.0 meter overschrijden.

De volgende belangrijke conclusie kan dus worden getrokken. Het verhogen van de grenswaarde in Hydra_b van $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ naar $9000 \text{ m}^3/\text{s}$ levert, ingeval terugkeertijden $T \geq 1250$ jaar worden beschouwd, verschillen in waterstanden en kruinhoogten van maximaal 0.02 meter . Deze uitspraak geldt voor iedere locatie in het Benedenrivierengebied met een decimeringswaarde kleiner dan 1.0 meter . Voor een locatie met een grotere

⁴ Uit de afchatting volgt altijd een bovengrens kleiner dan 0.02 m voor de keuzes $B_0 = 60$ getijden, $1 \leq b_0 \leq 2$ getijden, $1250 \leq T \leq 10000$ jaar, $\beta = 9000 \text{ m}^3/\text{s}$ en decimeringswaarde 1.0 meter .

decimeringswaarde kan een evenredig groter verschil resulteren. Met nadruk zij gesteld dat de genoemde 0.02 m een *bovengrens* betreft, en dat de werkelijk optredende verschillen aanzienlijk kleiner kunnen zijn. Dat laatste bleek bijvoorbeeld het geval voor de waterstandsberekeningen in tabel 2.3, waar voor $T \geq 1250$ jaar de verschillen nooit groter zijn dan 0.001 meter.

We merken nog op dat gelijktijdig met het schrijven van dit werkdocument ook in UBW-kader naar de invloed van de grenswaarde is gekeken [Vrouwenvelder, 2002]. Dat onderzoek is zojuist afgerond, en de resultaten uit dat onderzoek geven eveneens aan dat de keuze van de grenswaarde er weinig tot doet tenzij deze erg hoog wordt gekozen. De conclusies uit dat onderzoek stemmen dus goed overeen met de bevindingen in dit werkdocument.

De belangrijkste conclusies uit dit hoofdstuk voor de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h) = \Psi_H(h, q_g)$ van waterstanden h (faalmechanisme overloop) en kruinhoogten h (faalmechanismes golfoverslag en golfoploop) luiden als volgt.

Conclusies

1. Een *hogere* grenswaarde leidt in Hydra_b (afgezien van numerieke onnauwkeurigheden) altijd tot een *hogere* of minstens even hoge overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h)$ van niveau h .
2. Voor lagere niveaus h heeft een verandering van de grenswaarde in Hydra_b grotere gevolgen voor de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h)$ dan voor hogere niveaus h . Anders gezegd, voor lagere terugkeertijden heeft een verandering van de grenswaarde in Hydra_b grotere gevolgen voor de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h)$ dan voor hogere terugkeertijden.
3. Het verhogen van de grenswaarde in Hydra_b van $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ (defaultwaarde) naar $9000 \text{ m}^3/\text{s}$ levert, ingeval terugkeertijden $T \geq 1250$ jaar worden beschouwd, verschillen in *waterstanden* en *kruinhoogten* van in ieder geval minder dan 0.02 meter.
Deze uitspraak geldt voor iedere locatie in het Benedenrivierengebied met een decimeringswaarde kleiner dan 1.0 meter. Voor een locatie met een grotere of kleinere decimeringswaarde dan 1.0 meter resulteert een evenredig groter of kleiner verschil dan 0.02 meter; bijvoorbeeld voor een locatie met een decimeringswaarde van 0.5 meter resulteert een maximaal verschil van 0.01 meter. Voor de meeste, zo niet alle locaties zullen de verschillen vermoedelijk aanmerkelijk kleiner zijn dan de genoemde 0.02 meter.
4. Indien $T \geq 1250$ jaar en voor de grenswaarde q_g in Hydra_b geldt $6000 \text{ m}^3/\text{s} \leq q_g \leq 12000 \text{ m}^3/\text{s}$, zullen de uitkomsten voor de berekende *waterstanden* niet meer dan orde millimeters hoger uitvallen dan berekend met de standaard in Hydra_b gebruikte 'defaultwaarde' $q_g = 6000 \text{ m}^3/\text{s}$; voor de meeste locaties zullen de verschillen overigens nog kleiner zijn.

3 Afschatting voor de invloed van de grenswaarde

3.1 Voorbereidende formules en beschrijving van de wiskundige aannames ten behoeve van de afschatting

Er wordt verondersteld dat de lezer goed bekend is met de inhoud van [Geerse, 2000ab] en met de formules van Hydra_b. De hier voor onze doeleinden belangrijkste Hydra_b formules werden in paragraaf 2.2 gegeven. We brengen verder het volgende in herinnering, zie voor de gebruikte notatie tevens [Geerse, 2000ab]. Een belangrijke grootheid in de formules van Hydra_b is de kans op falen $P(H_q > h)$ in een getijperiode, bij gegeven afvoer q . Deze zal hier korter worden aangeduid als $f(q)$. Dus

$$(3.1) \quad f(q) = P(H_q > h) \\ = \text{kans op falen, dat wil zeggen overbelasting van kruinhoogte } h, \text{ in een getijperiode, bij} \\ \text{gegeven afvoer } q \text{ tijdens de beschouwde getijperiode.}$$

Verder speelt in de formules voor Hydra_b de kans op falen tijdens de passage van de afvoergolf met tophoogte k een rol. Die wordt gegeven door

$$(3.2) \quad P(F | q_g, k) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - f(q_j))$$

Hierin is q_j de waarde van de afvoer in de j -de getijperiode, gerekend vanaf het begin van de afvoergolf. De grenswaarde q_g zal in het vervolg veelal worden aangeduid met β , omdat het voortdurend meenemen van de index g in de formules onhandig is.

We zullen nu, met $\beta = q_g$, de formule voor $P(F | \beta, k)$, die bestaat uit een discreet product over een aantal getijden, herschrijven als een integraal over een ‘continue’ tijd. Dit betreft overigens een benadering, waarover hieronder meer. De grootheden t_a en t_b duiden het begin- en eindtijdstip aan waarop de afvoergolf de grenswaarde β doorschrijdt, en $\alpha(t, k)$ geeft de afvoergolf als functie van de tijd; zie desgewenst de appendix van [Geerse, 2000a] voor meer uitleg over het gebruik en de notatie betreffende de afvoergolven. We merken op dat t_a en t_b , hoewel niet expliciet in de notatie aangegeven, afhangen van k . We kunnen nu schrijven, zie (3.2), indien de tijd wordt gerekend in eenheden van getijperioden

$$(3.3) \quad \ln[1 - P(F | \beta, k)] = \sum_{j=1}^n \ln[1 - f(q_j)] \approx \int_{t_a}^{t_b} dt \ln[1 - f(\alpha(t, k))]$$

waarbij de integraal een benadering is van de som in het middelste lid. Dus geldt

$$(3.4) \quad P(F | \beta, k) \approx 1 - \exp \left\{ \int_{t_a}^{t_b} dt \ln[1 - f(\alpha(t, k))] \right\}$$

We geven het rechterlid aan met $G(\beta, k)$, dus

$$(3.5) \quad G(\beta, k) = 1 - \exp \left\{ \int_{t_a}^{t_b} dt \ln[1 - f(\alpha(t, k))] \right\}$$

en noemen deze grootheid ‘de continue versie’ van de faalkans tijdens de passage van de afvoergolf, ofwel de continue versie van $P(F | \beta, k)$. We merken op dat de benadering

$$(3.6) \quad P(F | \beta, k) \approx G(\beta, k)$$

een vrij goede benadering zal zijn. De afvoer varieert namelijk niet al te snel over een getijperiode, terwijl

$P(F | \beta, k)$ gezien kan worden als de numerieke berekening van de integraal $G(\beta, k)$ door de tijd te discretiseren in stapjes van een getijperiode. Anders gezegd, een vrij ruwe discretisatie in getijperiodes om de integraal numeriek op te lossen levert $P(F | \beta, k)$ op. Een fijnere discretisatie zal niet zo heel veel anders uitpakken. Verder merken we op dat in plaats van de $P(F | \beta, k)$ in Hydra_b te implementeren ook de $G(\beta, k)$ geïmplementeerd had kunnen worden. Dat laatste is principieel gezien zelfs iets beter, omdat in $G(\beta, k)$ de continu in de tijd variërende afvoer het beste wordt verwerkt. De afchatting voor de invloed van de grenswaarde op berekende kruinhoogtes is afgeleid door gebruik te maken van $G(\beta, k)$ in plaats van $P(F | \beta, k)$.

Indien $f(q)$ stijgend is, in de zin dat $f(q_1) \geq f(q_0)$ als $q_1 \geq q_0$, kunnen eenvoudige onder- en bovengrenzen van $G(\beta, k)$ worden gegeven. Dan geldt, omdat $f(\beta) \leq f(\alpha(t, k)) \leq f(k)$,

$$(3.7) \quad 1 - [1 - f(\beta)]^{t_b - t_a} \leq G(\beta, k) \leq 1 - [1 - f(k)]^{t_b - t_a}$$

Deze ongelijkheid kan betrekkelijk eenvoudig geverifieerd worden met behulp van (3.5), en omdat $\ln(1-x)$ en $1-\exp(x)$ beiden dalende functies zijn in x .

De golfvorm kan in plaats van als functie $\alpha(t, k)$ van de tijd ook gekarakteriseerd worden door de overschrijdingsduur $L(q, k)$ van niveau q binnen de golf met tophoogte k , waarbij hier $L(q, k)$ in eenheden van getijden wordt uitgedrukt. Neem vooreerst aan dat de afvoergolf een topduur nul heeft, dus dat $L(k, k) = 0$. In [Geerse, 2000a] wordt afgeleid dat in dat geval de integratie in (3.5) over de tijd kan worden herschreven als een integratie over de afvoer, met als resultaat

$$(3.8) \quad G(\beta, k) = 1 - \exp \left\{ - \int_{\beta}^k dq \ln[1 - f(q)] \frac{dL(q, k)}{dq} \right\}$$

Neem nu aan dat de afvoergolf een topduur $b_0 > 0$ heeft en definieer

$$(3.9) \quad \bar{L}(q, k) = L(q, k) - b_0$$

waarvoor dan uiteraard geldt $\bar{L}(k, k) = 0$. In de integratie in (3.5) kan het ‘topdeel’ van de afvoergolf van duur b_0 eenvoudig worden afgesplitst. De resterende integratie kan dan weer worden herschreven als hiervoor, met als resultaat

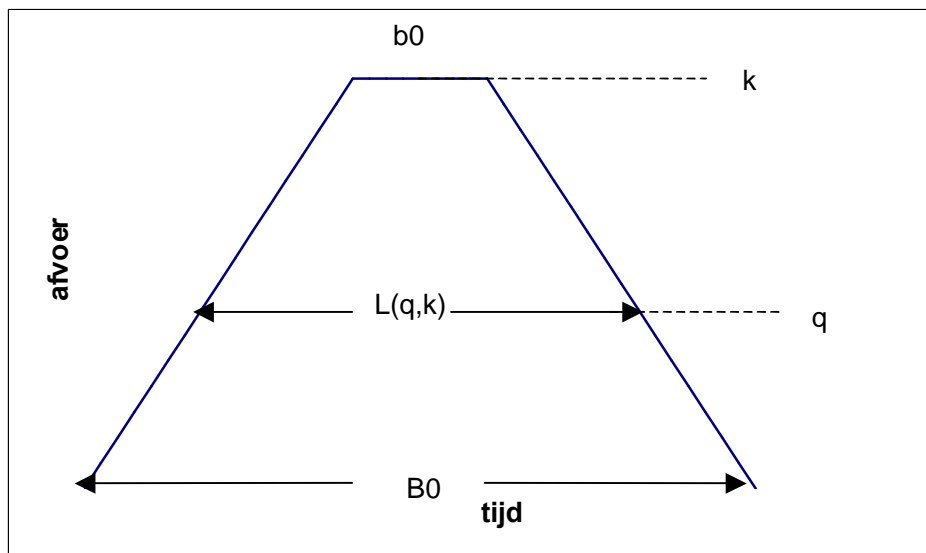
$$(3.10) \quad G(\beta, k) = 1 - (1 - f(k))^{b_0} \exp \left\{ - \int_{\beta}^k dq \ln[1 - f(q)] \frac{d\bar{L}(q, k)}{dq} \right\}$$

De factor $(1 - f(k))^{b_0}$ is afkomstig van het topdeel met duur b_0 .

Vanaf nu zullen we afvoergolven met een trapeziumvorm beschouwen, die samenhangen door een verticale vermenigvuldigingsfactor. De golfvorm wordt dan gegeven door, voor $B_0 > 0$ en $0 \leq b_0 \leq B_0$,

$$(3.11) \quad L(q, k) = \begin{cases} \frac{(B_0 - b_0)(k - q)}{k} + b_0 & , 0 \leq q \leq k, k > 0 \\ 0 & , q > k > 0 \end{cases}$$

Het trapezium heeft dus basisduur B_0 , zie figuur 3.1 ter illustratie.



Figuur 3.1 Trapezium als golfvorm.

We zullen nu de afchatting formuleren waarmee de invloed van de grenswaarde kan worden onderzocht. Deze afchatting is exact afgeleid onder de volgende voorwaarden.

1. Gebruik van $G(\beta, k)$ in de Hydra_b formules in plaats van $P(F | \beta, k)$.
2. Gebruik van trapeziumvormige afvoergolven als in (3.11) met $0 \leq b_0 \leq B_0$, $B_0 > 0$.
3. Faalkans $f(q)$ voor een getijperiode is een stijgende functie van de afvoer q , dus $f(q_1) \geq f(q_0)$ als $q_1 \geq q_0$.
4. Wiskundige voorwaarden, met name betreffende de mate van continuïteit en differentiëerbaarheid van relevante grootheden.
5. Consistente afvoerstatistiek.

We maken de volgende opmerkingen hierover.

Punt (1) is aangenomen omdat de discrete $P(F | \beta, k)$ onhandig is om mee te werken. Bij gebruik van de discrete versie zouden bovendien details een rol spelen over hoe precies de opdeling in getijden van de afvoergolf wordt gekozen en wat gedaan moet worden met het feit dat $L(\beta, k)$ in de regel niet een geheel aantal getijperiodes beslaat. Bij de continue versie doen deze problemen zich niet voor.

Punt (2) is aangenomen omdat $dL(q, k)/dq$ dan een simpele vorm heeft. In principe zou de eis van een trapeziumgolf enigszins kunnen worden afgezwakt, maar daarop wordt hier niet verder ingegaan. We merken tevens op dat de standaardafvoergolven voor Rijn en Maas uitstekend kunnen worden benaderd door trapezia met $B_0 \approx 60$ getijden en $b_0 \approx 1$ á 2 getijden.

Punt (3) stelt dat bij een hogere afvoer de kans op falen in een getijperiode niet mag afnemen. In Hydra_b is hier altijd aan voldaan. In het geval de Sobeksommen aanleiding geven tot een afnemende belasting bij toenemende afvoer, worden de isolijnen namelijk zodanig aangepast ('gerepareerd') dat de belasting niet langer meer afneemt bij toenemende afvoer. In het bewijs van de afchatting is de eis in punt (3) overigens alleen van belang om te garanderen dat $G(\beta, k_1) \geq G(\beta, k_0)$ indien $k_1 \geq k_0$. Deze laatste eigenschap is alleen gebruikt om wiskundig-technische redenen, en is misschien niet noodzakelijk voor de geldigheid van de afchatting.

Punt (4) betreft allerlei wiskundig-technische voorwaarden die als 'zeer mild' kunnen worden bestempeld. Deze voorwaarden betreffen vooral de mate van differentiëerbaarheid en continuïteit van $G(\beta, k)$ en laten tamelijk irregulier gedrag van deze grootheid toe. Naar de mening van schrijver dezes zal in de situatie van Hydra_b, zeker voor trapeziumvormige afvoergolven, zonder meer aan de gestelde voorwaarden voldaan zijn.

Punt (5) houdt in dat de gebruikte afvoerstatistiek consistent dient te zijn, in de zin dat de gebruikte afvoergolven, de dagenlijn en de werklijn niet strijdig met elkaar mogen zijn. Dit werd reeds toegelicht in hoofdstuk 2.

3.2 Afschatting invloed grenswaarde en voorbeelden van het gebruik van de afschatting

De afschatting, waarvan het bewijs in hoofdstuk 4 en 5 gegeven zal worden, waarmee de invloed van de grenswaarde op de overschrijdingsfrequentie kan worden geschat heeft betrekking op de afgeleide van de overschrijdingsfrequentie en luidt, met $0 \leq b_0 \leq B_0$, $B_0 > 0$,

$$(3.12) \quad R(\beta) + \frac{\Psi(\beta)(B_0 - b_0)}{\beta} \{f(\beta) + \ln[1 - f(\beta)]\} \leq \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \leq R(\beta) + \frac{f(\beta)(B_0 - b_0)\Psi_H(h, \beta)}{\beta}$$

Daarnaast geldt, indien de topduur b_0 van het trapezium minstens één getijperiode bedraagt,

$$(3.13) \quad 0 \leq R(\beta) \leq \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \leq R(\beta) + \frac{f(\beta)(B_0 - b_0)\Psi_H(h, \beta)}{\beta}, \text{ als } b_0 \geq 1$$

Hierin is

$$(3.14) \quad R(\beta) = \begin{cases} \psi(\beta) \{f(\beta)b_0 - 1 + [1 - f(\beta)]^{b_0}\} & \text{als } b_0 > 0 \\ 0 & \text{als } b_0 = 0 \end{cases}$$

en de symbolen hebben de volgende betekenis

whjaar	= winterhalfjaar van 182 dagen.
h	= kruinhoogte of waterstand in m + NAP
β	= grenswaarde in m ³ /s
$\Psi_H(h, \beta)$	= overschrijdingsfrequentie in keren/whjaar van belastingniveau h, bij aangenomen grenswaarde β .
$\Psi(q)$	= overschrijdingsfrequentie van afvoerniveau q in keren/whjaar (werklijn).
$\psi(q)$	= frequentiedichtheid van de afvoer, die gelijk is aan $\psi(q) = -d\Psi(q)/dq$.
b_0	= topduur in getijperiodes van het trapezium waarmee de afvoergolf wordt gemodelleerd.
B_0	= basisduur in getijperiodes van het trapezium waarmee de afvoergolf wordt gemodelleerd.
$f(q)$	= kans op falen in een getijperiode bij gegeven afvoer q tijdens de getijperiode, zie (3.1).

Uit de afschatting (3.13) volgt dat indien de topduur minstens één getijperiode bedraagt de afgeleide van de overschrijdingsfrequentie groter dan of gelijk aan nul is. Een hogere grenswaarde zal dan dus altijd leiden tot een minstens zo hoge overschrijdingsfrequentie. Losjes gezegd, een hogere grenswaarde levert in deze situatie een hogere of even hoog blijvende waterstand of kruinhoogte. Aan het eind van hoofdstuk 4 zal worden toegelicht dat de in Hydra_b gebruikte afvoergolven ‘effectief gezien’ een topduur b_0 van minstens één getijperiode hebben. In het volgende voorbeeld wordt daarom afschatting (3.13) gebruikt ter illustratie van het gebruik van de afschatting. Dat voorbeeld kan dan met Hydra_b vergeleken worden, zoals in hoofdstuk 2 reeds werd gedaan.

Voorbeeld 1: afschatting invloed grenswaarde voor MHW Dordrecht

We zullen afschatting (3.13) toepassen met getallen die representatief zijn voor locaties in de buurt van Dordrecht. Voor Dordrecht geldt een terugkeertijd $T = 2000$ jaar als norm. Volgens Hydra_b volgt dan een MHW van $h = 3.006 \text{ m} + \text{NAP}$. Het beschouwen van h is in het voorbeeld overigens niet relevant. Wat vooral relevant is voor de uitwerking van het voorbeeld is de grootte van $f(q)$ voor q in de buurt van de beschouwde grenswaarde. Deze $f(q)$ blijkt voor afvoeren van 6000 tot 12000 m³/s op zijn hoogst $5 \cdot 10^{-4}$ te zijn volgens Hydra_b. Deze waarde is dus een bovengrens voor $f(q)$ op het genoemde afvoerbereik. Het is deze bovengrens die gebruikt zal worden in de afschatting.

We zullen het effect van de grenswaarde q_g op $\Psi_H(h, q_g)$ bekijken wanneer de nu in Hydra_b gebruikte grenswaarde van 6000 m³/s wordt veranderd in 12000 m³/s. Tevens willen we weten wat het effect is van deze verandering op het berekende MHW. Daartoe zullen we de afschatting gebruiken voor $\beta = 9000 \text{ m}^3/\text{s}$, welke waarde het gemiddelde vormt van beide grenswaarden. De afschatting levert dan dat de afgeleide van $\Psi_H(h, \beta)$

naar β voor de waarde $\beta = 9000 \text{ m}^3/\text{s}$ altijd groter dan of gelijk aan nul is; tevens geeft de afchatting een bovengrens voor de afgeleide. Wanneer deze waarde van de afgeleide representatief wordt geacht op het hele traject van 6000 tot 12000 m^3/s , kan eenvoudig de verandering in $\Psi_H(h, q_g)$ worden geschat ten gevolge van de verandering in de grenswaarde van 6000 naar 12000 m^3/s . Merk op dat het *gebruik van de afchatting*, in tegenstelling tot de wiskundig zeer preciese afleiding daarvan (zie hoofdstuk 4 en 5), op *pragmatische wijze* gebeurt.

We gebruiken de volgende getallen voor de afchatting⁵, waarbij de officiële werklijn voor Lobith [Kalk, 2001] is gehanteerd.

β	$= 9000 \text{ m}^3/\text{s}$
B_0	$= 60$ getijperiodes
b_0	$= 2$ getijperiodes
$f(\beta)$	$= 5 \cdot 10^{-4}$
$\Psi_H(h, \beta)$	$= 1/2000$ per whjaar
$\Psi(\beta)$	$= 0.135$ per whjaar
$\psi(\beta)$	$= 0.135/1517.78 = 8.92 \cdot 10^{-5} \text{ s/m}^3$ per whjaar

Dan volgt

$$(3.16) \quad R(\beta) = 2.2 \cdot 10^{-11}$$

Uit (3.13) volgt nu

$$(3.17) \quad 0 \leq \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \leq 1.6 \cdot 10^{-9}$$

Schrijf nu

$$(3.18) \quad \Delta\Psi_H(h) = \Psi_H(h, 12000) - \Psi_H(h, 6000)$$

Uit (3.17) volgt dan door vermenigvuldiging met $\Delta\beta = 6000 \text{ m}^3/\text{s}$ dat in benadering geldt

$$(3.19) \quad 0 \leq \Delta\Psi_H(h) \leq 9.80 \cdot 10^{-6}$$

Tevens volgt

$$(3.20) \quad 0 \leq \frac{\Delta\Psi_H(h)}{\Psi_H(h, \beta)} \leq 1.96 \cdot 10^{-2}$$

We vinden derhalve door het verleggen van de grenswaarde van 6000 naar 12000 m^3/s een relatieve verandering in de overschrijdingsfrequentie van maximaal circa 2%. Omdat de decimeringshoogte te Dordrecht ongeveer 0.30 m bedraagt houdt deze 2% een verandering van MHW in van ongeveer $0.30 \log(1.02) = 0.003 \text{ m}$. Het verhogen van de grenswaarde in Hydra_b van 6000 naar 12000 m^3/s levert dus een verhoging van MHW van maximaal circa 0.3 cm voor Dordrecht. We merken op dat Hydra_b voor Dordrecht een verandering geeft van minder dan 0.1 cm. De afchatting geeft dus een iets ruimere marge dan de berekening met Hydra_b aangeeft. Dat laatste is logisch omdat ten eerste de gebruikte waarde voor $f(q)$ een bovengrens vormt en ten tweede de afchatting zelf eveneens een bovengrens vormt. De conclusie is dat tenminste in dit voorbeeld de afchatting een zeer nuttig hulpmiddel vormt om de verandering in de overschrijdingsfrequentie te schatten die het gevolg is van een verandering in de grenswaarde.

⁵ Gezien het gebruik van de getallen, namelijk in een vrij ruwe afchatting, is het feitelijk nogal overdreven met zoveel decimalen te werken. Sommige getallen komen uit een spreadsheet; voor de vergelijkbaarheid is het dan praktisch om meerdere decimalen te hanteren.

Voorbeeld 2: invloed grenswaarde voor afvoerblokken

Het is interessant de afchatting toe te passen op ‘afvoerblokken’ in plaats van op trapezia. Deze afvoerblokken worden namelijk nogal eens gebruikt in zogenaamde FBC-modellen. Daartoe nemen we in (3.11) aan $B_0 = b_0$. Uit (3.12) volgt dan meteen

$$(3.21) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} = R(\beta)$$

De afchatting geeft dan blijkbaar een expliciete formule voor de afgeleide van de overschrijdingsfrequentie. Overigens kan (3.21) ook betrekkelijk eenvoudig direct geverifieerd worden, zonder gebruik te maken van (3.12).

Als voorbeeld bekijken we nu weer de invloed op $\Psi_H(h, q_g)$ wanneer de grenswaarde van 6000 naar 12000 m³/s wordt gebracht. We nemen nu $B_0 = b_0 = 20$ getijperioden en gebruiken verder dezelfde waarden als in het eerste voorbeeld. Nu volgt, voor $\beta = 9000$ m³/s,

$$(3.22) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} = 4.2 * 10^{-9}$$

In benadering geldt

$$(3.23) \quad 0 \leq \Delta\Psi_H(h) \leq 6000 * 4.2 * 10^{-9} = 2.53 * 10^{-5} \text{ per jaar}$$

$$(3.24) \quad 0 \leq \frac{\Delta\Psi_H(h)}{\Psi_H(h, \beta)} \leq \frac{2.53 * 10^{-5}}{1/2000} = 5.07 * 10^{-2}$$

De overgang op de hogere grenswaarde levert dus een verhoging van de overschrijdingsfrequentie met maximaal circa 6%, wat overeenkomt met een verandering in berekende MHW van circa $0.30 \log(1.05) \approx 0.006$ m. Dat laatste getal is ongeveer een factor 2 groter dan de 0.003 m die in het eerste voorbeeld werd gevonden. De invloed van de grenswaarde is voor deze keuze van de blokbreedte $B_0 = 20$ getijperiodes dus iets groter dan die voor het trapezium met $B_0 = 60$ en $b_0 = 2$ getijperiodes. We merken nog op dat met de keuze $B_0 = b_0 = 1$ getijperiode volgt dat $\Psi_H(h, \beta)$ helemaal niet van de grenswaarde β afhangt, omdat dan $R(\beta) = 0$. In het bovenstaande is uiteraard voortdurend verondersteld dat de gebruikte afvoerstatistiek consistent is, zoals reeds eerder opgemerkt.

Uit de afchatting (3.12) kan een belangrijke conclusie getrokken worden, namelijk dat de grenswaarde β niet meer van invloed is op de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h, \beta)$ indien de faalkans $f(\beta)$ voor een getijperiode maar klein genoeg is. Dat laatste zal in de regel in toepassingen het geval zijn indien β voldoende laag wordt gekozen. Hoe lager de afvoer β , hoe dichter $f(\beta)$ namelijk bij nul zal liggen. De bewering dat een voldoende kleine $f(\beta)$ tot gevolg heeft dat de keuze van β niet meer van invloed is op de overschrijdingsfrequentie kan worden ingezien als volgt. Er kan eenvoudig geverifieerd worden dat zowel $R(\beta)$ als $f(\beta) + \ln(1 - f(\beta))$ naar nul gaan indien $f(\beta)$ tot nul nadert, zodat direct uit (3.12) volgt, voor $b_0 \geq 0$,

$$(3.25) \quad \lim_{f(\beta) \downarrow 0} \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} = 0$$

Ofwel, als $f(\beta) \approx 0$, dan is de afgeleide van de overschrijdingsfrequentie ongeveer 0, en moet de overschrijdingsfrequentie ongeveer constant zijn bij een verandering van β . Hoe klein $f(\beta)$ in toepassingen moet zijn, wil de grenswaarde niet van invloed zijn, kan met (3.12) bepaald worden als in voorbeeld 1 en 2 hierboven.

Terzijde nog de volgende wiskundig-technische details. Bewering (3.25) lijkt direct te volgen uit (3.12), maar in feite is er het probleem dat de term $f(\beta)\Psi_H(h, \beta)/\beta$, die in het rechterlid van (3.12) voorkomt, naar oneindig zou

kunnen gaan als $f(\beta)$ naar nul gaat. Dat zou kunnen gebeuren als het naar nul gaan van $f(\beta)$ impliceert dat ook β naar nul gaat. Overigens is (3.25) wel degelijk te bewijzen, met behulp van formule (4.13) uit hoofdstuk 4, wanneer de frequentiedichtheid $\psi(k)$ van de afvoer voor de zeer lage afvoeren maar voldoende snel naar nul gaat. Om precies te zijn is een voldoende voorwaarde aan deze dichtheid

$$(3.26) \quad \int_0^{\infty} dk \frac{\psi(k)}{k} = C < \infty$$

In het bijzonder houdt deze voorwaarde in dat de momentane kansdichtheid $g(q)$ dan uniform begrensd is op het hele afvoerbereik, dus dat geldt $g(q) < K < \infty$ voor alle $q \geq 0$. Voor een exponentiële werkklijn zal niet aan (3.26) zijn voldaan, omdat de beschouwde integraal dan divergeert. Tevens zal in die situatie dan $g(q)$ naar oneindig gaan als q naar nul gaat, wat eenvoudig volgt uit (4.4). Deze opmerkingen hebben alle betrekking op golfvormen $L(q,k)$ die trapezia zijn als in (3.11). De kern van het probleem is gelegen in het feit dat voor deze golfvormen $dL(q,k)/dq$ naar (minus) oneindig gaat indien de topwaarde k tot nul nadert.

4 Bewijs van de afschatting en overige beschouwingen

4.1 Bewijs van de afschatting

In het vervolg worden de bewijzen van (3.12) en (3.13) gegeven. Daarnaast worden nog enkele aanvullende resultaten bewezen. Enkele wiskundig-technische stappen zullen in deze paragraaf worden weggelaten; deze zullen worden gegeven in hoofdstuk 5. Die stappen hebben betrekking op het toepassen van de zogenaamde ‘Regel van Leibniz’ op de formules (4.3) en (4.6). De meeste lezers zullen de rechtvaardiging van de genoemde stappen, en daarmee hoofdstuk 5, willen overslaan, omdat de stappen ogenschijnlijk evident lijken. We merken wel op dat de volledige rechtvaardiging van deze stappen gecompliceerder is dan het hieronder gegeven deel van het bewijs.

De Regel van Leibniz die hieronder zal worden toegepast luidt als volgt. Beschouw een reële functie $h(x, y)$ van reële variabelen x en y . De Regel van Leibniz stelt dat als $I(x)$ gegeven wordt door

$$(4.1) \quad I(x) = \int_x^{x_0} dy \, h(x, y)$$

dat dan de afgeleide naar x hiervan wordt gegeven door

$$(4.2) \quad \frac{dI(x)}{dx} = -h(x, x) + \int_x^{x_0} dy \, \frac{dh(x, y)}{dx}$$

Bewijs van afschatting (3.12)

De eerste stap in het bewijs van de afschatting (3.12) is het toepassen van (4.2) op de afvoerstatistiek. We gaan steeds uit van een consistente afvoerstatistiek, wat inhoudt dat, zie [Geerse, 2000b],

$$(4.3) \quad N \int_q^\infty dk \, g(k) = \int_q^\infty dk \, \psi(k) L(q, k) = b_0 \Psi(q) + \int_q^\infty dk \, \psi(k) \bar{L}(q, k)$$

Hierin is $N = 352$ getijden/winterhalfjaar, $g(k)$ de momentane kansdichtheid van de afvoer en $\psi(k)$ de frequentiedichtheid van de afvoer. Differentiëren naar q en toepassen van (4.2) levert dan, omdat $\bar{L}(q, q) = 0$ en $d\bar{L}(q, k)/dq < 0$, voor $b_0 \geq 0$,

$$(4.4) \quad N g(q) = b_0 \psi(q) + \int_q^\infty dk \, \psi(k) \left| \frac{d\bar{L}(q, k)}{dq} \right|$$

waarmee de momentane kansdichtheid is geschreven als functie van de frequentiedichtheid en de afgeleide van de golfvorm. Het is hier dat de consistentie-eis aan de afvoerstatistiek zijn intrede doet; bij een niet-consistente afvoerstatistiek zal (4.4) niet gelden.

De continue versie van de Hydra_b formule voor $\Psi_H(h, \beta)$, dat wil zeggen de versie met $P(F | k, \beta)$ vervangen door $G(\beta, k)$, wordt gegeven door

$$(4.5) \quad \Psi_H(h, \beta) = N \int_0^\beta dk \, g(k) f(k) + \int_\beta^\infty dk \, \psi(k) G(\beta, k)$$

Het kan voorkomen dat $f(q)$ – en daarmee $G(\beta, q)$ – vanaf zekere q gelijk wordt aan 1, wat het geval zal zijn als de afvoer q zo hoog wordt dat ongeacht de overige omstandigheden altijd falen optreedt. Noem de waarde van q waarvoor dat gebeurt q_h . Indien zo’n waarde niet bestaat wordt $q_h = \infty$ gesteld. Formule (4.5) kan dan worden herschreven als

$$(4.6) \quad \Psi_H(h, \beta) = N \int_0^\beta dk \, g(k) f(k) + \int_\beta^{q_h} dk \, \psi(k) G(\beta, k) + \Psi(q_h)$$

De Regel van Leibniz geeft dan, door gebruik te maken van (4.3), voor $\beta < q_h$,

$$(4.7) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} = \psi(\beta) f(\beta) b_0 + f(\beta) \int_\beta^\infty dk \, \psi(k) \left| \frac{d\bar{L}(\beta, k)}{d\beta} \right| - G(\beta, \beta) \psi(\beta) + \int_\beta^{q_h} dk \, \psi(k) \frac{dG(\beta, k)}{d\beta}$$

De toepassing van de Regel van Leibniz op (4.3) en (4.6) wordt in hoofdstuk 5 volledig gerechtvaardigd voor trapeziumvormige afvoergolven van de vorm (3.11). Het is echter uitermate plausibel dat de in hoofdstuk 4 en 5 gegeven formules veel algemener gelden dan slechts voor trapeziumvormige afvoergolven; vandaar dat meestentijds de algemene notatie $L(q, k)$ wordt gebruikt voor de afvoergolven. Alleen waar nodig zal de expliciete vorm (3.11) worden gehanteerd.

Voor de afgeleide van $G(\beta, k)$ gegeven door (3.10) kan geschreven worden,

$$(4.8) \quad \frac{dG(\beta, k)}{d\beta} = [1 - G(\beta, k)] \ln[1 - f(\beta)] \left| \frac{d\bar{L}(\beta, k)}{d\beta} \right| \leq 0$$

Deze afgeleide wordt 0 voor $k \geq q_h$, zodat de bovengrens q_h in de laatste integraal in (4.7) desgewenst mag worden vervangen door ∞ . Schrijf nu, voor $b_0 > 0$,

$$(4.9) \quad R(\beta) = \psi(\beta) \{ f(\beta) b_0 - G(\beta, \beta) \} = \psi(\beta) \{ f(\beta) b_0 - 1 + [1 - f(\beta)]^{b_0} \}$$

Tevens definiëren we $R(\beta) = 0$ indien $b_0 = 0$.

Dan kan (4.7), zie desgewenst hoofdstuk 5, worden herschreven als, voor $\beta < q_h$,

$$(4.10) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} = R(\beta) + \int_\beta^\infty dk \, \psi(k) \left| \frac{d\bar{L}(\beta, k)}{d\beta} \right| \{ f(\beta) + [1 - G(\beta, k)] \ln[1 - f(\beta)] \}$$

Schrijf nu tijdelijk als afkorting $f = f(\beta)$, $G = G(\beta, k)$ en geef het deel tussen accolades in de integrand in de voorgaande formule aan met $A(k)$. Dan kan eenvoudig geverifieerd worden dat geldt, omdat f en G beiden tussen 0 en 1 liggen en derhalve $f + \ln(1 - f) \leq 0$, dat

$$(4.11) \quad A(k) = f + (1 - G) \ln(1 - f) = (1 - G) [f + \ln(1 - f)] + f G \leq f G$$

$$(4.12) \quad A(k) = f + \ln(1 - f) - G \ln(1 - f) \geq f + \ln(1 - f)$$

Dan volgt uit (4.10) dat

$$(4.13) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \leq R(\beta) + f(\beta) \int_\beta^\infty dk \, \psi(k) \left| \frac{d\bar{L}(\beta, k)}{d\beta} \right| G(\beta, k)$$

en

$$(4.14) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \geq R(\beta) + \{ f(\beta) + \ln[1 - f(\beta)] \} \int_\beta^\infty dk \, \psi(k) \left| \frac{d\bar{L}(\beta, k)}{d\beta} \right|$$

Nu pas zullen we de specifieke keuze voor $L(q,k)$ maken waarbij voor de golfvorm het trapezium wordt genomen van de vorm (3.11). In dat geval geldt, voor $0 < \beta < k$,

$$(4.15) \quad \left| \frac{d\bar{L}(\beta, k)}{d\beta} \right| = \frac{B_0 - b_0}{k} \leq \frac{B_0 - b_0}{\beta}$$

en tevens

$$(4.16) \quad \int_{\beta}^{\infty} dk \, \psi(k) \left| \frac{d\bar{L}(\beta, k)}{d\beta} \right| \leq \Psi(\beta) \frac{B_0 - b_0}{\beta}$$

Dan volgt uit (4.13)

$$(4.17) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \leq R(\beta) + f(\beta) \frac{B_0 - b_0}{\beta} \int_{\beta}^{\infty} dk \, \psi(k) G(\beta, k) = R(\beta) + f(\beta) \frac{B_0 - b_0}{\beta} \Psi_H(h, \beta; Q \text{ hoog})$$

waarin $\Psi_H(h, \beta; Q \text{ hoog})$ het deel van de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h, \beta)$ geeft dat correspondeert met de hoge afvoeren. Uiteraard is dat deel kleiner dan of gelijk aan $\Psi_H(h, \beta)$, zodat volgt

$$(4.18) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \leq R(\beta) + f(\beta) \frac{B_0 - b_0}{\beta} \Psi_H(h, \beta)$$

Uit (4.14) en (4.16) volgt, omdat $f(\beta) + \ln(1-f(\beta)) \leq 0$, dat

$$(4.19) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \geq R(\beta) + \{f(\beta) + \ln[1-f(\beta)]\} \Psi(\beta) \frac{B_0 - b_0}{\beta}$$

De laatste drie formules kunnen samengevat worden als, voor $0 < \beta < q_h$,

$$(4.20) \quad \begin{aligned} R(\beta) + \{f(\beta) + \ln[1-f(\beta)]\} \Psi(\beta) \frac{B_0 - b_0}{\beta} &\leq \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \\ &\leq R(\beta) + f(\beta) \frac{B_0 - b_0}{\beta} \Psi_H(h, \beta; Q \text{ hoog}) \\ &\leq R(\beta) + f(\beta) \frac{B_0 - b_0}{\beta} \Psi_H(h, \beta) \end{aligned}$$

Het eerste en laatste lid vormen afchatting (3.12) die bewezen moest worden. Hiermee is het bewijs van (3.12) dus compleet.

Bewijs van afchatting (3.13)

Wat betreft de ondergrens aan $d\Psi_H(h, \beta)/d\beta$ valt nog een interessante opmerking te maken in geval $b_0 \geq 1$ is. In dat geval mag voor deze ondergrens namelijk $R(\beta) \geq 0$ worden genomen. Oftewel

$$(4.21) \quad 0 \leq R(\beta) \leq \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \leq R(\beta) + f(\beta) \frac{B_0 - b_0}{\beta} \Psi_H(h, \beta) \quad \text{als } b_0 \geq 1$$

wat gelijk is aan ongelijkheid (3.13). De ongelijkheid stelt dat een hogere grenswaarde dus altijd een hogere (of minstens even hoge) overschrijdingsfrequentie tot gevolg heeft. Het bewijs is eenvoudig en verloopt als volgt. Indien $b_0 \geq 1$ geldt vanwege de ongelijkheid (3.7)

$$(4.22) \quad 1 - G(\beta, k) \leq [1 - f(\beta)]^{t_b - t_a} \leq [1 - f(\beta)]^{b_0} \leq 1 - f(\beta)$$

Voor de grootheid $A(k)$ uit (4.11) en (4.12) geldt dan, omdat $\ln(1-f(\beta)) \leq 0$,

$$(4.23) \quad A(k) = f(\beta) + [1 - G(\beta, k)] \ln(1 - f(\beta)) \geq f(\beta) + [1 - f(\beta)] \ln(1 - f(\beta)) \geq 0$$

waarbij het laatste ongelijkheidsteken vrij eenvoudig te verifiëren valt door de afgeleide functie $x \mapsto x + (1-x)\ln(1-x)$ te beschouwen voor $0 \leq x < 1$. Eveneens valt te verifiëren dat $R(\beta) \geq 0$ voor $b_0 \geq 1$. Vanwege de laatste bewering en (4.10), (4.20) en (4.23) volgt dan onmiddellijk (4.21).

4.2 Overige beschouwingen in relatie tot de afschatting

Een iets scherpere afschatting

Merk op dat het derde lid van (4.20) nog een iets scherpere afschatting van de bovengrens aan $d\Psi_H(h, \beta)/d\beta$ geeft dan het laatste lid. Daaruit blijkt dat als $\Psi_H(h, \beta; Q \text{ hoog})$, te weten het deel van de overschrijdingsfrequentie dat correspondeert met de hoge afvoeren, klein is, de afgeleide $d\Psi_H(h, \beta)/d\beta$ klein is, mits tenminste ook $R(\beta)$ klein is. Ter informatie, deze situatie doet zich bijvoorbeeld voor bij de MHW-berekening voor Dordrecht voor grenswaarde $\beta \approx 16000 \text{ m}^3/\text{s}$. In dat geval bedraagt $\Psi_H(h, \beta; Q \text{ hoog})$ slechts enkele procenten (minder dan 5%) van de totale overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h, \beta)$. Oftewel, boven de $16000 \text{ m}^3/\text{s}$ bevindt zich nog maar een kleine kansbijdrage aan de overschrijdingsfrequentie, wat – dit terzijde – inhoudt dat een hogere dan de maatgevende afvoer voor Dordrecht nauwelijks gevaar oplevert. (De kans op een combinatie van de maatgevende afvoer met een stormvloed die MHW overschrijdt is veel kleiner dan de kans op een combinatie van een afvoer van bijvoorbeeld $10000 \text{ m}^3/\text{s}$ met een stormvloed die MHW overschrijdt.) Voor $\beta \approx 16000 \text{ m}^3/\text{s}$ is ook $R(\beta)$ klein, namelijk $R(\beta) \approx 5 \cdot 10^{-12}$. Verder is $f(\beta) \approx 3 \cdot 10^{-3}$. In dat geval geldt, met $B_0 = 60$ en $b_0 = 2$, $d\Psi_H(h, \beta)/d\beta \leq 3 \cdot 10^{-10}$. Een verhoging van de grenswaarde met $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ levert dan een verhoging in MHW van nog geen 0.0001 m . Dus deze verandering in grenswaarde levert voor Dordrecht dan nog geen 0.1 mm verhoging op van het MHW.

Effectief in Hydra_b topduur $b_0 \geq 1$

Het is illustratief om (4.20) en (4.21) in samenhang met Hydra_b te zien. In Hydra_b worden afvoergolven niet met trapezia gemodelleerd, maar door middel van standaardafvoergolven, welke een veel regelmatig verloop in de tijd vertonen dan de trapezia die een knik vertonen bij de overgang van de flanken naar het topniveau. De standaardafvoergolven hebben een ‘ronde’ top, met een topduur nul. In de implementatie van Hydra_b zijn de standaardafvoergolven opgedeeld in getijperiodes, zie (3.2). Daarbij is [persoonlijke communicatie M. Duits] voor de getijperiode j_{top} , waarin de topafvoer valt niet de gemiddelde afvoer $q_{j_{\text{top}}}$ genomen, maar de topafvoer k van de beschouwde afvoergolf. Voor de overige getijperiodes j is steeds de gemiddelde afvoer q_j over de getijperiode genomen. Effectief houdt dit in dat in Hydra_b de standaardafvoergolven een topduur $b_0 = 1$ getijperiode hebben gekregen in plaats van topduur $b_0 = 0$. Dat doet vermoeden dat voor Hydra_b dan (4.21) moet gelden, wat inhoudt dat een hogere grenswaarde in Hydra_b altijd gepaard gaat met een hogere (of gelijkblijvende) overschrijdingsfrequentie. Dat (4.21) niet volledig hard te maken valt voor Hydra_b komt omdat in Hydra_b met de discrete $P(F | \beta, k)$ wordt gewerkt in plaats van met de continueversie $G(\beta, k)$ daarvan. Voor de praktijk kan men er gerust van uitgaan dat in Hydra_b aan (4.21) is voldaan, behoudens zeer kleine numerieke onnauwkeurigheden. Ten behoeve van tabel 2.5 in hoofdstuk 2 is uitgegaan van (4.21).

De speciale gevallen $b_0 = 0$ en $b_0 = 1$

Voor een topduur van precies 0 of 1 getijperiode is $R(\beta) = 0$. In dat geval volgt uit (4.20)

$$(4.24) \quad \frac{d\Psi_H(h, \beta)}{d\beta} \leq f(\beta) \frac{B_0}{\beta} \Psi_H(h, \beta), \quad \text{indien } b_0 = 0 \text{ of } b_0 = 1$$

In het voorgaande is de invloed van de grenswaarde geschat, zie voorbeeld 1 in hoofdstuk 3, op basis van de afchatting (4.21), door de afgeleide van de overschrijdingsfrequentie te beschouwen. Wanneer het verschil in uitkomsten tussen twee grenswaarden β_0 en β_1 werd beschouwd, werd gekeken naar de afgeleide in de grenswaarde $\beta = (\beta_0 + \beta_1)/2$. Deze afgeleide werd dan representatief geacht voor het gehele interval $[\beta_0, \beta_1]$. Deze toepassing van de afchatting gebeurt op enigszins pragmatische wijze, omdat de afgeleide op het gehele interval niet steeds dezelfde waarde heeft. Ongelijkheid (4.24) kan gebruikt worden, tenminste in de situatie $b_0 = 1$, om het verschil in uitkomsten tussen beide grenswaarden op exacte wijze af te schatten. We merken op dat de aanname $b_0 = 1$ in Hydra_b tamelijk goed overeenstemt met de werkelijke situatie.

Beschouw nu twee grenswaarden β_0 en β_1 . Omdat $f(q)$ een stijgende functie is in q , volgt dan uit (4.24)

$$(4.25) \quad \frac{d \ln(\Psi_H(h, \beta))}{d\beta} \leq f(\beta_1) \frac{B_0}{\beta}, \quad \text{voor } \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$$

Door integratie van deze ongelijkheid van β_0 tot β_1 volgt

$$(4.26) \quad \ln \frac{\Psi_H(h, \beta_1)}{\Psi_H(h, \beta_0)} \leq f(\beta_1) B_0 \ln \frac{\beta_1}{\beta_0}$$

en door vervolgens aan beide zijden de e-macht te nemen, volgt dan

$$(4.27) \quad \frac{\Psi_H(h, \beta_1)}{\Psi_H(h, \beta_0)} \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0} \right)^{f(\beta_1) B_0}, \quad \text{als } b_0 = 0$$

en omdat vanwege (4.21) voor $b_0 = 1$ een hogere grenswaarde nooit een lagere overschrijdingsfrequentie tot gevolg kan hebben

$$(4.28) \quad 1 \leq \frac{\Psi_H(h, \beta_1)}{\Psi_H(h, \beta_0)} \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0} \right)^{f(\beta_1) B_0}, \quad \text{als } b_0 = 1$$

Laten we de laatste ongelijkheid toepassen voor het MHW te Dordrecht ($h = 3.006 \text{ m+NAP}$), voor de representatieve getallen

β_0	$= 6000 \text{ m}^3/\text{s}$
β_1	$= 12000 \text{ m}^3/\text{s}$
B_0	$= 60 \text{ getijperiodes}$
b_0	$= 1 \text{ getijperiode}$
$f(\beta_1)$	$= 5 \cdot 10^{-4}$

Dan volgt

$$(4.29) \quad 1 \leq \frac{\Psi_H(h, \beta_1)}{\Psi_H(h, \beta_0)} \leq 1.021$$

Uitgaande van een decimeringshoogte van 0.30 m volgt dan dat de overgang van grenswaarde $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ naar $12000 \text{ m}^3/\text{s}$ een verhoging in MHW geeft van maximaal $0.30 \log(1.021) = 0.003 \text{ m}$. Omdat de benadering van de ‘werkelijke’ standaardafvoergolven door trapezia met een basisduur $B_0 = 60$ getijden een topduur $b_0 = 1$ getijde behoorlijk goed is, kan de genoemde verhoging van het MHW met maximaal 0.003 m als een zeer precies bepaalde bovengrens worden beschouwd. We brengen in herinnering dat de Hydra_b berekening in hoofdstuk 2 slechts een verschil van 0.000 m tot 0.001 m te zien gaf tussen de grenswaarden $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ en $12000 \text{ m}^3/\text{s}$.

4.3 Afschatting voor de getijkans

De getijkans $f(\beta)$ speelt een belangrijke rol in de hiervoor beschouwde afschattingen. Daarom is het nuttig ook over een afschatting voor deze getijkans te beschikken. Zo'n afschatting wordt in deze paragraaf afgeleid, tenminste voor de situatie van grenswaarden kleiner dan $10000 \text{ m}^3/\text{s}$, welke situatie voor onze doeleinden ook het meest relevant is. De golfvorm mag daarbij willekeurig zijn en hoeft dus niet een trapezium te zijn. Wel zullen we aannemen dat de topduur van het trapezium tenminste één getijperiode duurt, wat zoals in paragraaf 4.2 is uitgelegd effectief in Hydra_b het geval is.

Uit (3.7) volgt, voor willekeurige golfvormen,

$$(4.30) \quad G(\beta, k) \geq 1 - [1 - f(\beta)]^{L(\beta, k)} \geq f(\beta)$$

waarbij de laatste ongelijkheid het gevolg is van het feit dat $L(\beta, k) \geq 1$.

Indien $f(\beta)$ klein genoeg is en $L(\beta, k)$ niet heel erg groot kan het middelste lid eenvoudig benaderd worden als

$$(4.31) \quad 1 - [1 - f(\beta)]^{L(\beta, k)} \approx f(\beta)L(\beta, k)$$

Helaas geldt deze relatie slechts in benadering, terwijl we in het vervolg over een exacte gelijkheid van deze vorm dienen te beschikken. Gelukkig blijkt een soortgelijke relatie af te leiden die wel exact geldt, mits wordt aangenomen dat β niet al te groot is. Daartoe gaan we verder als volgt. Vanwege (4.5) en (4.30) kunnen we schrijven

$$(4.32) \quad \begin{aligned} \Psi_H(h, \beta) &\geq \Psi_H(h, \beta; Q_{\text{hoog}}) = \int_{\beta}^{\infty} dk \, \psi(k) G(\beta, k) \\ &\geq \int_{\beta}^{\infty} dk \, \psi(k) (1 - [1 - f(\beta)]^{L(\beta, k)}) \geq \int_{\beta}^{\infty} dk \, \psi(k) f(\beta) \geq f(\beta) \Psi(\beta) \end{aligned}$$

zodat volgt

$$(4.33) \quad f(\beta) \leq \frac{\Psi_H(h, \beta)}{\Psi(\beta)}$$

Dit is een gezonde afschatting voor $f(\beta)$, die helaas niet krachtig genoeg is voor onze doeleinden. We kunnen deze afschatting echter wel gebruiken om een krachtigere afschatting af te leiden die geldt voor niet al te hoge β en niet al te lage $\Psi_H(h, \beta)$. Neem daartoe in het vervolg aan dat $\beta \leq 10000 \text{ m}^3/\text{s}$ en h zo groot dat $\Psi_H(h, \beta) \leq 1/1250$ per whjaar. Omdat de werklijn (3.1) dan geeft dat $\Psi(\beta) \geq \Psi(10000) = 1/14.3$ per whjaar, volgt voor deze situatie uit (4.33) dat

$$(4.34) \quad f(\beta) \leq \frac{14.3}{1250} = 0.011$$

Voor de standaardafvoergolven voor de Rijn geldt (tenzij onrealistisch hoge afvoergolven worden beschouwd) dat $L(\beta, k) \leq 100$ getijden. Het is dan eenvoudig te verifiëren (analytisch of met een spreadsheet) dat voor de hier beschouwde $f(\beta)$ dan geldt

$$(4.35) \quad 1 - [1 - f(\beta)]^{L(\beta, k)} \geq 0.6 f(\beta) L(\beta, k)$$

Deze gelijkheid vormt een exact analogon van de benadering (4.31). We merken op dat (4.35) niet alleen geldt voor de standaardafvoergolven, maar voor alle golfvormen waarvoor $1 \leq L(\beta, k) \leq 100$ getijden. Als in (4.32) kunnen we nu schrijven, met behulp van (4.35), de consistentie-eis (4.3) en (3.2),

$$(4.36) \quad \Psi_H(h, \beta) \geq 0.6 f(\beta) \int_{\beta}^{\infty} dk \quad \psi(k) L(\beta, k) = 0.6 f(\beta) NP(Q > \beta) = 0.6 f(\beta) \Psi(\beta) d(\beta)$$

waaruit volgt

$$(4.37) \quad f(\beta) \leq 1.7 \frac{\Psi_H(h, \beta)}{\Psi(\beta) d(\beta)}, \quad \text{indien } \beta \leq 10000 \text{ m}^3/\text{s} \text{ en } \Psi_H(h, \beta) \leq 1/1250 \text{ per whjaar}$$

Wanneer we de standaardafvoergolven beschouwen, volgt volgens tabel 2.1 voor de beschouwde β dat $d(\beta) \geq d(10000) = 7.5$ getijden. Analoog aan (4.34) volgt dan uit (4.37)

$$(4.38) \quad f(\beta) \leq \frac{1.7 * 14.3}{1250 * 7.5} = 0.0026$$

Voor de hier beschouwde waarden van $\Psi_H(h, \beta)$ en β vormt de afchatting (4.37) dus een verbetering van de afchatting (4.33). Op zijn beurt kan (4.37) nog iets verbeterd worden ingeval standaardafvoergolven worden beschouwd. Vanwege (4.38) en $L(\beta, k) \leq 100$ getijden volgt dan namelijk

$$(4.39) \quad 1 - [1 - f(\beta)]^{L(\beta, k)} \geq 0.88 f(\beta) L(\beta, k)$$

Analoog aan (4.36) volgt dan, voor standaardafvoergolven,

$$(4.40) \quad f(\beta) \leq 1.15 \frac{\Psi_H(h, \beta)}{\Psi(\beta) d(\beta)}, \quad \text{indien } \beta \leq 10000 \text{ m}^3/\text{s} \text{ en } \Psi_H(h, \beta) \leq 1/1250 \text{ per whjaar}$$

Het getal 1.7 uit (4.37) blijkt dus verkleind te kunnen worden tot 1.15 ingeval de standaardafvoergolven worden beschouwd. De afchatting (4.37) geldt voor meer algemene golvormen, waarvoor slechts hoeft te gelden $1 \leq L(\beta, k) \leq 100$ getijden. In principe kan voor de standaardafvoergolven het getal 1.15 in (4.40) nog iets verbeterd worden, maar niet substantieel.

Ter illustratie van (4.40) beschouwen we $\beta = 9000 \text{ m}^3/\text{s}$ en h zo groot dat $\Psi_H(h, \beta) \leq 1/1250$ per whjaar. Uit de werklijn en tabel 2.1 volgt dan

$$(4.41) \quad f(9000 \text{ m}^3/\text{s}) \leq \frac{1.15 * 7.4}{1250 * 8.4} = 0.0008$$

Oppervlakkig beschouwd lijkt de conclusie te zijn dat voor waterstanden en kruinhoogten met terugkeertijden $T \geq 1250$ jaar de getijkans voor afvoer $9000 \text{ m}^3/\text{s}$ dus altijd kleiner zal zijn dan 0.0008. (Bedenk hierbij dat $f(\beta)$, hoewel niet expliciet in de notatie aangegeven, ook van h afhangt.) De waterstanden en kruinhoogten worden in Hydra_b echter berekend met de defaultgrenswaarde $6000 \text{ m}^3/\text{s}$, terwijl in de teller in het rechterlid van (4.40) de $\Psi_H(h, \beta)$ voorkomt in plaats van $\Psi_H(h, 6000)$. Omdat voor de hier beschouwde kleine getijkansen de preciese waarde van de grenswaarde echter niet zo belangrijk is, zal in goede benadering echter gelden dat $\Psi_H(h, \beta) \cong \Psi_H(h, 6000)$. Uitgaande van (4.41) kan met afchatting (3.13), analoog aan de voorbeelden in paragraaf 3.2, worden aangetoond dat de relatieve fout in deze benadering maximaal 4 % bedraagt, zodat $\Psi_H(h, \beta) \leq 1.04 * \Psi_H(h, 6000)$. Dan volgt uit (4.40)

$$(4.42) \quad f(\beta) \leq 1.2 \frac{\Psi_H(h, 6000 \text{ m}^3/\text{s})}{\Psi(\beta) d(\beta)}, \quad \text{indien } \beta \leq 9000 \text{ m}^3/\text{s} \text{ en } \Psi_H(h, 6000 \text{ m}^3/\text{s}) \leq 1/1250 \text{ per whjaar}$$

In de teller van deze afchatting komt de standaard in Hydra_b gebruikte grenswaarde voor. Deze afchatting vormt een zeer bruikbaar hulpmiddel waarmee voor terugkeertijden $T \geq 1250$ jaar de getijkans kan worden afgeschat indien grenswaarden kleiner dan $9000 \text{ m}^3/\text{s}$ worden beschouwd. Een belangrijk punt is dat de afchatting op geen enkele manier van het beschouwde faalmechanisme afhangt! Het maakt dus niet uit of waterstanden (faalmechanisme overloop) worden bekeken of kruinhoogten (faalmechanismes golfoverloop of golfoverslag). Uit (4.42) volgt, analoog aan (4.41)

$$(4.43) \quad f(9000 \text{ m}^3/\text{s}) \leq \frac{1.2 * 7.4}{1250 * 8.4} = 0.00085$$

Blijkbaar geldt voor een afvoer van $9000 \text{ m}^3/\text{s}$ en voor terugkeertijden $T \geq 1250$ dat de getijkans zeker kleiner zal zijn dan 0.001, zowel bij het beschouwen van waterstanden als van kruinhoogten.

We merken nog op dat $\Psi(\beta)d(\beta) = NP(Q > \beta)$, waaruit blijkt dat $\Psi(\beta)d(\beta)$ een afnemende functie is van β . Het rechterlid van (4.42) is dus een toenemende functie van β . Dat is ook plausibel, omdat $f(\beta)$ eveneens toenemend is in β .

4.4 Extreem hoge grenswaarden en Hydra_b versus de Deltamethode

In deze paragraaf zullen we het verband behandelen tussen Hydra_b en de Deltamethode. De Deltamethode bestaat uit de berekeningswijze voor de lage afvoeren, maar dan toegepast op het gehele bereik van afvoeren. De benaming ‘Deltamethode’ wordt gebruikt omdat de Deltacommissie in de vijftiger jaren van de vorige eeuw deze berekeningswijze heeft toegepast. Met Hydra_b kunnen resultaten volgens de Deltamethode worden verkregen door de grenswaarde gelijk aan oneindig te nemen.

In paragraaf 4.1 is steeds aangenomen dat $\beta \leq q_h$, wat inhoudt dat de getijkans $f(\beta)$ steeds strikt kleiner is dan 1. Voor de volledigheid kijken we nu naar grenswaarden $\beta > q_h$. Dan geldt voor $k \geq \beta$ dat zowel $f(k)$ als $G(\beta, k)$ gelijk zijn aan 1. Uit (4.5) volgt dan

$$(4.44) \quad \Psi_H(h, \beta) = N \int_0^{q_h} dk \, g(k) f(k) + NP(q_h < Q < \beta) + \Psi(\beta)$$

Vanwege (3.2) kan dit herschreven worden als

$$(4.45) \quad \Psi_H(h, \beta) = N \int_0^{q_h} dk \, g(k) f(k) + NP(Q > q_h) + \Psi(\beta)(1 - d(\beta))$$

Hieruit blijkt dat een steeds hogere grenswaarde altijd een andere $\Psi_H(h, \beta)$ tot gevolg heeft, tenzij vanaf een zekere β altijd geldt $d(\beta) = 1$. Dat laatste zal in concrete toepassingen niet het geval zijn. Overigens is het β -afhankelijke deel $\Psi(\beta)(1 - d(\beta))$ eenvoudig af te schatten. Bijvoorbeeld vanaf de maatgevende afvoer, zie tabel 2.1, zal gelden $|\Psi(\beta)(1 - d(\beta))| < 5 * \Psi(\beta)$.

De Deltamethode bestaat uit de berekeningsmethode waarvoor β in $\Psi_H(h, \beta)$ oneindig wordt genomen, in welk geval de term $\Psi(\beta)(1 - d(\beta))$ in (4.45) gelijk aan nul wordt. Dus de overschrijdingsfrequentie wordt dan gelijk aan

$$(4.46) \quad \Psi_{H, \text{Delta}}(h) = N \int_0^{q_h} dk \, g(k) f(k) + NP(Q > q_h)$$

Het is genoegzaam bekend dat de Deltamethode ver landinwaarts geen goede resultaten levert, dus dat de overschrijdingsfrequentie volgens (4.46) geen goede resultaten geeft voor MHW- en kruinhoogteberekeningen. In het geval van de MHW-berekening voor een volledig afvoergedomineerde locatie kan het verschil tussen de wel goed te motiveren Hydra_b formules, met grenswaarde $\beta = 6000 \text{ m}^3/\text{s}$, en (4.46) eenvoudig worden onderzocht.

Een volledig afvoergedomineerde locatie wil zeggen dat de afvoer de enige grootte is die fysisch van invloed is op de waterstand, dus dat de windsnelheid en windrichting geen enkele invloed doen gelden. Aan de bovenranden van het model, bijvoorbeeld voor Tiel om maar een concrete locatie te noemen, is dat in zeer goede benadering het geval. (Voor Tiel is het effect van de wind op MHW slechts orde 0.01 m, met $h = 11.39 \text{ m} + \text{NAP}$ en $q_h = 16000 \text{ m}^3/\text{s}$.) Wiskundig gezien houdt de aanname van volledig afvoergedomineerd in dat de getijkans tot

aan de afvoer q_h gelijk is aan nul, terwijl de getijkans abrupt naar de waarde 1 springt ter plaatse van de waarde q_h , oftewel

$$(4.47) \quad f(q) = \begin{cases} 1 & \text{als } q \geq q_h \\ 0 & \text{als } q < q_h \end{cases}$$

De overschrijdingsfrequentie volgens Hydra_b kan in dit geval eenvoudig worden uitgerekend, tenminste indien $\beta < q_h$, waar in praktische situaties zonder meer aan voldaan zal zijn, omdat voor MHW-berekeningen q_h orde $16000 \text{ m}^3/\text{s}$ is terwijl β in Hydra_b gelijk is aan $6000 \text{ m}^3/\text{s}$. Voor de overschrijdingsfrequentie volgens Hydra_b kan eenvoudig geverifieerd worden dat uit (4.5) nu volgt

$$(4.48) \quad \Psi_H(h, \beta) = \Psi(q_h)$$

De overschrijdingsfrequentie volgens Hydra_b geeft dus precies de overschrijdingsfrequentie van de afvoerwaarde q_h waarvoor, losjes gezegd, een dijk die precies ligt ter hoogte van MHW begint over te lopen. Dat is ongetwijfeld in deze situatie het goede antwoord. De overschrijdingsfrequentie volgens de Deltamethode kan in dit geval ook simpel worden berekend. Formules (4.46) en (4.47) geven nu

$$(4.49) \quad \Psi_{H, \text{Delta}}(h) = N P(Q > q_h)$$

Met behulp van (3.2) volgt nu voor de verhouding van de overschrijdingsfrequentie volgens de Deltamethode en Hydra_b

$$(4.50) \quad \frac{\Psi_{H, \text{Delta}}(h)}{\Psi_H(h, \beta)} = \frac{N P(Q > q_h)}{\Psi(q_h)} = d(q_h)$$

De verhouding tussen beide frequenties blijkt dus gelijk te zijn aan de gemiddelde overschrijdingsduur van het niveau q_h binnen afvoergolven waarvan de tophoogtes de waarde q_h overstijgen⁶. In toepassingen zal $d(q_h)$ in de regel groter dan 1 getijperiode zijn, wat inhoudt dat voor volledig afvoergedomineerde locaties de Deltamethode een factor $d(q_h) > 1$ hoger uitkomt dan de (juiste) berekening volgens Hydra_b.

Ter illustratie van dit alles nemen we Tiel als voorbeeld. Daarvoor geldt in zeer goede benadering $h = 11.39 \text{ m+NAP}$ en $q_h = 16000 \text{ m}^3/\text{s}$, bij een terugkeertijd $T = 1250$ jaar. Uit tabel 2.1 volgt dan $d(q_h) = 5.0$ getijden. De Deltamethode komt voor Tiel dus een factor 5.0 hoger uit dan de (juiste) berekening met Hydra_b. De laatste berekening geeft $T = 1250$ jaar, terwijl de Deltamethode hier uitkomt op $T = 1250/5.0 = 250$ jaar. Omdat de decimeringshoogte voor Tiel ongeveer 0.9 m bedraagt, levert de Deltamethode hier een MHW dat circa $0.9 \cdot \log(5.0) = 0.63 \text{ m}$ hoger uitkomt dan de Hydra_b berekening die een MHW van $h = 11.39 \text{ m+NAP}$ oplevert. Uit tabel 2.3 blijkt dat het verschil tussen Hydra_b en de Deltamethode gelijk is aan 0.614 m, in goede overeenstemming met het zojuist genoemde bedrag. De Deltamethode levert voor sterk afvoergedomineerde locaties dus een aanzienlijke fout op in de MHW-berekening van orde meerdere decimeters.

⁶ In feite is $d(q_h)$ in deze context een dimensieloze grootheid, omdat N in formule (4.46) bij nadere beschouwing de eenheid keren/whjaar blijkt te hebben, in plaats van aantal getijden/whjaar. Dat laatste is een gevolg van de manier waarop de frequentie van de zeewaterstand is getransformeerd naar een kansverdeling geassocieerd met een getijperiode. Dat wordt hier niet nader toegelicht.

5 Details van het bewijs voor de afschatting

5.1 Regel van Leibniz-variant ten behoeve van invloed grenswaarde

In deze paragraaf wordt een variant van de in hoofdstuk 4, zie (4.2), genoemde Regel van Leibniz bewezen. Deze variant zal in het vervolg worden aangeduid als Leibniz-variant stelling, kortweg LV-stelling genoemd. Het bewijs geschiedt op wiskundig zeer strenge wijze. Zoals in de inleiding van hoofdstuk 4 al eerder vermeld zal deze LV-stelling dan worden toegepast op (4.3) en (4.6). Die toepassing vormt onderwerp van paragraaf 5.3. De inhoud van dit hoofdstuk is bedoeld voor specialisten die ten eerste goed op de hoogte zijn van de Hydra_b formules en ten tweede over een zeer gedegen wiskundige kennis beschikken.

Hieronder wordt een lijst met voorwaarden opgesomd (namelijk (5.1) t/m (5.8)) waaronder de LV-stelling geldt. Ter verheldering zij opgemerkt dat de functie $f(q, k)$, die in het volgende een prominente rol speelt, in paragraaf 5.3 zal worden toegepast op respectievelijk $L(q, k)$ en $G(q, k)$. Daarbij zal voor de eveneens in de voorwaarden voorkomende functie $\varphi(k)$ de frequentiedichtheid $\psi(k)$ van de afvoer worden genomen. Een dergelijke lange lijst voorwaarden lijkt beperkend, maar is het juist niet. De voorwaarden laten namelijk betrekkelijk irregulier gedrag toe van de beschouwde grootheden, en hebben vooral betrekking op de mate van continuïteit en differentieerbaarheid van $f(q, k)$. Neem in het volgende steeds aan dat alle functies Lebesgue-meetbaar zijn.

Beschouw een functie $f: [d, \infty) \times (d, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, voor een $d \in \mathbb{R}$, met de volgende eigenschappen.

$$(5.1) \quad f(q, k) = 0 \text{ als } q > k > d$$

en voor iedere $k > d$ is $q \mapsto f(q, k)$ continu op $[d, \infty) \setminus \{k\}$.

$$(5.2) \quad \text{Als } k_1 \geq k_0 \geq 0, \text{ dan } f(q, k_1) \geq f(q, k_0) \text{ voor elke } q \geq d$$

Neem aan dat een eindige verzameling $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ bestaat, die eventueel leeg mag zijn, zodat voor elke $k \in (d, \infty) \setminus K$ de afgeleide.

$$(5.3) \quad \frac{df(q, k)}{dq} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(q+h, k) - f(q, k)}{h}$$

bestaat als eindige limiet voor elke $q \in (d, \infty) \setminus \{k\}$. Losjes gezegd: uitgezonderd eindig veel k -waarden bestaat de afgeleide, met uitzondering eventueel van het geval $q = k$. Merk op dat voor $q > k$ de afgeleide altijd 0 is vanwege (5.1).

Beschouw vanaf nu een vaste $\beta > d$ waarvoor aan de volgende voorwaarden is voldaan.

$$(5.4) \quad \lim_{h \uparrow 0} f(\beta + h, \beta + h) = \lim_{h \uparrow 0} f(\beta + h, \beta) = f(\beta, \beta) = \lim_{h \downarrow 0} f(\beta, \beta + h)$$

Beschouw een functie $\varphi: [d, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, die continu is in β , waarvoor geldt

$$(5.5) \quad \int_d^\infty dk \varphi(k) < \infty$$

en, voor alle $q > d$,

$$(5.6) \quad \left| \int_q^\infty dk \varphi(k) f(q, k) \right| < \infty$$

Neem verder aan dat een functie $g_\beta: (d, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bestaat, alsmede een $c_\beta \in (d, \beta)$, zodat geldt

$$(5.7) \quad \int_{c_\beta}^{\infty} dk \, \varphi(k) g_\beta(k) < \infty$$

en, voor iedere $k \in (\beta, \infty) \setminus K$ bestaat een $\varepsilon_{\beta,k}$ met $0 < \varepsilon_{\beta,k} < k - \beta$ zodat geldt

$$(5.8) \quad \left| \frac{df(q, k)}{dq} \right| \leq g_\beta(k), \text{ voor alle } q \in (\beta - \varepsilon_{\beta,k}, \beta + \varepsilon_{\beta,k})$$

Merk op dat de functie $g_\beta(k)$ niet alleen van β , maar ook van c_β mag afhangen, hoewel dat laatste niet expliciet in de notatie tot uitdrukking komt.

Beschouw nu, voor een $a > d$ met eventueel $a = \infty$, de functie $I: (d, a) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$(5.9) \quad I(\beta) = \int_{\beta}^a dk \, \varphi(k) f(\beta, k)$$

LV-stelling: Beschouw een $\beta \in (d, a)$ waarvoor $\varphi(k)$ continu is in $k = \beta$ en neem aan dat aan de voorwaarden (5.1) t/m (5.8) is voldaan. Dan geldt

$$(5.10) \quad \frac{dI(\beta)}{d\beta} = -f(\beta, \beta)\varphi(\beta) + \int_{\beta}^a dk \, \varphi(k) \frac{df(\beta, k)}{d\beta}$$

(Terzijde het volgende. Voor $k \in K$ hoeft de integrand niet te bestaan, maar definiëren we simpelweg $df(\beta, k) / d\beta = 0$, evenals voor $k = \beta$. Strikt genomen zouden we een functie $s_\beta(k)$ moeten gebruiken onder de integraal, waarvoor geldt $s_\beta(k) = df(\beta, k) / d\beta$ indien de afgeleide bestaat en $s_\beta(k) = 0$ indien deze niet bestaat. Om de notatie nietodeloos ingewikkeld te maken is dat hier achterwege gelaten.)

Bewijs van de LV-stelling

We dienen te bewijzen dat

$$(5.11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(\beta+h) - I(\beta)}{h}$$

gelijk is aan het rechterlid van (5.10). Schrijf

$$(5.12) \quad \square I_h = I(u+h) - I(u)$$

$$(5.13) \quad \chi_{t,a}(k) = \begin{cases} 1 & \text{als } t < k < a \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Beschouw eerst $h > 0$

Voor h voldoende klein, namelijk $h < a - \beta$, is

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \frac{\square I_h}{h} &= \frac{1}{h} \int dk \, \chi_{\beta+h,a}(k) f(\beta+h, k) \varphi(k) - \frac{1}{h} \int dk \, \chi_{\beta,a}(k) f(\beta, k) \varphi(k) \\ &= \frac{1}{h} \int dk \left[\chi_{\beta+h,a}(k) \varphi(k) \{f(\beta+h, k) - f(\beta, k)\} \right] - A_h \end{aligned}$$

waarin

$$(5.15) \quad A_h = \frac{1}{h} \int_{\beta}^{\beta+h} dk \, \varphi(k) f(\beta, k)$$

We zullen eerst de integraal in het laatste lid van (5.14) nader bekijken in de limiet $h \downarrow 0$. Allereerst zullen we aantonen dat geldt, voor iedere $k \in (d, \infty) \setminus K$,

$$(5.16) \quad \chi_{\beta+h,a}(k) \left| \frac{f(\beta+h, k) - f(\beta, k)}{h} \right| \leq g_{\beta}(k)$$

voor alle $h \in (0, \delta_k)$ met

$$(5.17) \quad \delta_k = \begin{cases} \varepsilon_{\beta,k} & \text{als } k \in (\beta, a) \\ a - \beta & \text{anders} \end{cases}$$

waarin $\varepsilon_{\beta,k}$ gekozen is als in (5.8).

Dat tonen we aan als volgt. Beschouw eerst $k \notin (\beta, a)$. Voor $h < \delta_k$ is dan $\chi_{\beta+h,a}(k) = 0$, zodat dan zeker is voldaan aan (5.16).

Beschouw nu $k \in (\beta, a)$ en $h < \delta_k$. Dan volgt uit (5.8) dat $\beta < \beta + h < \beta + \varepsilon_{\beta,k} < k$. Uit (5.3) blijkt dan dat $df(q, k)/dq$ bestaat voor alle $q \in [\beta, \beta + h]$. Uit de middelwaarde stelling volgt dan met behulp van (5.8), voor een θ met $0 < \theta < 1$,

$$(5.18) \quad \left| \frac{f(\beta+h, k) - f(\beta, k)}{h} \right| = \left| \frac{df(q, k)}{dq} \right|_{q=\beta+\theta h} \leq g_{\beta}(k)$$

waarmee direct (5.16) volgt.

Uit (5.16) volgt nu, voor $k \in (d, \infty) \setminus K$,

$$(5.19) \quad \left| \chi_{\beta+h,a}(k) \left\{ \frac{f(\beta+h, k) - f(\beta, k)}{h} \right\} \varphi(k) \right| \leq g_{\beta}(k) \varphi(k)$$

en, vanwege (5.3)

$$(5.20) \quad \lim_{h \downarrow 0} \chi_{\beta+h,a}(k) \left\{ \frac{f(\beta+h, k) - f(\beta, k)}{h} \right\} \varphi(k) = \chi_{\beta,a}(k) \frac{df(\beta, k)}{d\beta} \varphi(k)$$

Dan volgt uit Lebesgue's gedomineerde convergentie stelling, zie bijvoorbeeld [Billingsley, 1995; theoreem 16.4], vanwege (5.7), (5.19) en (5.20),

$$(5.21) \quad \lim_{h \downarrow 0} \int dk \chi_{\beta+h,a}(k) \varphi(k) \left\{ \frac{f(\beta+h, k) - f(\beta, k)}{h} \right\} = \int_{\beta}^a dk \varphi(k) \frac{df(\beta, k)}{d\beta}$$

De laatste integraal stemt overeen met de laatste term in (5.10). We zullen aantonen dat in de limiet $h \downarrow 0$ de grootheid A_h uit (5.15) de eerste term uit (5.10) oplevert. Deze A_h werd gegeven door

$$(5.22) \quad A_h = \frac{1}{h} \int_{\beta}^{\beta+h} dk \, \varphi(k) f(\beta, k)$$

Het idee achter het volgende bewijs is niet moeilijk. Voor kleine h gedraagt de integraal zich als de constante waarde $\varphi(\beta) f(\beta, \beta)$ in welk geval onmiddellijk volgt dat

$$(5.23) \quad \lim_{h \downarrow 0} A_h = \varphi(\beta) f(\beta, \beta)$$

Voor de liefhebbers volgen hier de details. Omdat bij aanname $\varphi(k)$ continu is in β , volgt vanwege (5.4) dat de functie $k \mapsto \varphi(k) f(\beta, k)$ rechts continu is in $k = \beta$. Dus is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden waarvoor

$$(5.24) \quad |\varphi(k) f(\beta, k) - \varphi(\beta) f(\beta, \beta)| < \varepsilon \quad \text{voor } 0 \leq k - \beta < \delta$$

We kunnen nu schrijven, voor $0 < h < \delta$,

$$(5.25) \quad |A_h - \varphi(\beta) f(\beta, \beta)| = \left| \frac{1}{h} \int_{\beta}^{\beta+h} dk \{ \varphi(k) f(\beta, k) - \varphi(\beta) f(\beta, \beta) \} \right| < \varepsilon$$

Omdat ε willekeurig is moet dan (5.23) gelden. Aldus is bewezen dat de rechterlimiet in (5.11) gelijk is aan het rechterlid van (5.10). Nu rest nog het bewijs voor de linkerlimiet in (5.11).

Beschouw nu $h < 0$.

Analoog aan (5.14) kan nu worden geschreven

$$(5.26) \quad \frac{\square I_h}{h} = B_h + \frac{1}{h} \int dk \chi_{\beta, \alpha}(k) \varphi(k) \{ f(\beta + h, k) - f(\beta, k) \}$$

met

$$(5.27) \quad B_h = \frac{1}{h} \int_{\beta+h}^{\beta} dk \varphi(k) f(\beta + h, k)$$

De integraal in het rechterlid van (5.26) kan behandeld worden analoog aan de integraal in het laatste lid van (5.14). De details worden aan de lezer overgelaten.

Voor de behandeling van de term B_h in het rechterlid van (5.26) maken we gebruik van de volgende afchatting, die direct volgt (5.2) en (5.4)

$$(5.28) \quad \frac{1}{h} \int_{\beta+h}^{\beta} dk \varphi(k) f(\beta + h, \beta + h) \leq B_h \leq \frac{1}{h} \int_{\beta+h}^{\beta} dk \varphi(k) f(\beta + h, \beta)$$

Analoog aan het bewijs van (5.23) kan nu eenvoudig worden bewezen, met behulp van de continuïteitseigenschappen uit (5.4), dat

$$(5.29) \quad \lim_{h \uparrow 0} B_h = -\varphi(\beta) f(\beta, \beta)$$

De details worden aan de lezer overgelaten. Hiermee is het bewijs van de LV-stelling compleet.

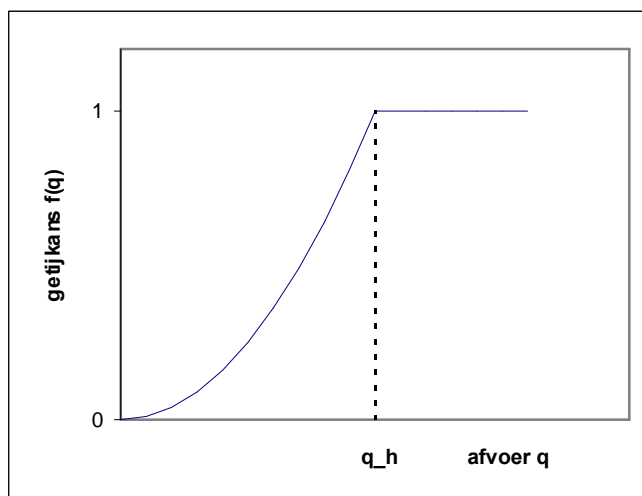
5.2 Toepassing van de Leibniz-variant-stelling

In paragraaf 5.1 is een stelling bewezen die kan worden beschouwd als een variant van de zogenaamde ‘Regel van Leibniz’, welke daar kortweg werd aangeduid als de LV-stelling. In hoofdstuk 4 werd de afchatting (4.20) bewezen. Bepaalde stappen uit het bewijs werden echter niet gerechtvaardigd. Deze rechtvaardiging kan worden gegeven door de LV-stelling toe te passen op respectievelijk $L(q, k)$ en $G(q, k)$, gegeven door (3.11) en (3.10), waarbij voor $b_0 = 0$ in plaats van (3.10) formule (3.8) dient te worden genomen. We dienden derhalve te verifiëren dat $L(q, k)$ zowel als $G(q, k)$, gegeven de grenswaarde β , voldoen aan de voorwaarden (5.1) tot en met (5.8) uit de LV-stelling. Na de voltooiing van deze verificatie kan dan de LV-stelling worden toegepast op (4.3) en (4.6), waarna het bewijs van (4.20) dan compleet is. De verificatie is het lastigst voor $G(q, k)$, omdat deze functie een ingewikkelder gedrag vertoont dan de ‘trapeziumvormige’ $L(q, k)$. In deze paragraaf zullen we daarom alleen $G(q, k)$ behandelen, waarbij de verificatie van de voorwaarden ten behoeve van $L(q, k)$ aan de lezer zelf wordt overgelaten. De behandeling van het trapezium $L(q, k)$ wordt aan de lezer zelf overgelaten.

Precieze definitie van $G(q, k)$

In hoofdstuk 3 werd de functie $G(q, k)$ gegeven, echter zonder het domein van de argumenten q en k expliciet aan te geven. Om de LV-stelling op $G(q, k)$ toe te passen dient een meer volledige definitie van $G(q, k)$ te worden gegeven. Daarbij zullen de gevallen $b_0 = 0$ en $b_0 > 0$ in één definitie worden gecombineerd, terwijl deze gevallen tot nu toe nu door twee formules, zie (3.8) en (3.10), werden gegeven. Allereerst geven we echter aan welk gedrag we voor de faalkans per getijperiode $f(q)$ veronderstellen.

We nemen aan dat $f(q)$ continu is, met $f: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, waarbij vanaf een waarde $q_h > 0$ de functie $f(q)$ gelijk wordt aan 1, zie figuur 6.1. Tevens is $f(q)$ stijgend, in de zin dat $f(q_1) \geq f(q_0)$ indien $q_1 \geq q_0$. Differentieerbaarheid van $f(q)$ is geen vereiste. Eventueel mag het voorkomen dat altijd $f(q) < 1$, in welk geval $q_h = \infty$ wordt genomen.



Figuur 6.1 Illustratie van de getijkans $f(q)$.

We definiëren nu, voor $k > 0$,

$$(6.1) \quad \tilde{f}(k) = \begin{cases} [1 - f(k)]^{b_0}, & \text{als } b_0 > 0 \\ 1, & \text{als } b_0 = 0 \end{cases}$$

Merk op dat $\tilde{f}(k) = 0$ als $k \geq q_h$ indien $b_0 > 0$, terwijl deze functie altijd 1 is indien $b_0 = 0$. Formules (3.8) en (3.10) kunnen nu gecombineerd worden door

$$(6.2) \quad G(q, k) = 1 - \tilde{f}(k) \exp \left\{ - \int_q^k ds \ln[1 - f(s)] \frac{dL(s, k)}{ds} \right\}$$

Nu volgt de volledige definitie van $G(q, k)$. Dit is een functie $G: [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, gegeven door

$$(6.3) \quad \text{als } 0 < k < q_h : G(q, k) = \begin{cases} \text{formule (6.2)} & , 0 \leq q < k \\ 1 - \tilde{f}(k) & , q = k \\ 0 & , q > k \end{cases}$$

$$\text{als } k \geq q_h : G(q, k) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq q \leq k \\ 0 & , q > k \end{cases}$$

Met deze definitie van $G(q, k)$ is formule (4.6) voor de overschrijdingsfrequentie $\Psi_H(h, \beta)$ geldig, voor grenswaarden β kleiner dan q_h .

We zullen steeds aannemen dat $L(q, k)$ het trapezium uit (3.11) vormt. De expliciete formule voor het trapezium zal veelal echter niet worden ingevuld; formule (6.2), alsmede de afleidingen in het vervolg, gelden namelijk ook voor meer algemene formules dan (3.11). In de exact-wiskundige verificatie van allerlei voorwaarden zullen we echter steeds aannemen dat $L(q, k)$ het trapezium vormt.

Toepassing van de LV-stelling op $G(q, k)$

Hieronder zal de LV-stelling worden toegepast op $G(q, k)$. Alvorens daartoe over te gaan geven we eerst wat grafieken betreffende het gedrag van $G(q, k)$. In figuur 5.2 en 5.3 worden respectievelijk de getallen $b_0 > 0$ en $b_0 = 0$ geïllustreerd. Het gedrag van $G(q, k)$, zoals weergegeven in de plaatjes, kan voor de diverse beschouwde situaties geverifieerd worden met behulp van de definities in (6.3), hoewel dat enige inspanning vereist. Een deel van de verificatie van de grafieken zal hieronder ter sprake komen bij de behandeling van de continuïteitseis (5.4). We merken nog op dat de discontinuïteit ter plaatse van $k = q_h$ in figuur 5.3-c afhangt van het precieze gedrag van $f(q)$. Afhankelijk van dat gedrag kan deze discontinuïteit ook afwezig zijn. De discontinuïteit zal in ieder geval optreden als de afgeleide $df(q)/dq$ bestaat op een linker open omgeving van q_h en tevens geldt op deze omgeving dat $df(q)/dq > C > 0$ voor een constante C . Het ontbreken van de discontinuïteit houdt noodzakelijkerwijs in dat de linker afgeleide van $f(q)$ in q_h gelijk aan nul zal moeten zijn. We brengen in herinnering dat in bovenstaande steeds is uitgegaan van het trapezium $L(q, k)$ als golfvorm, zij het dat verwacht mag worden dat de plaatjes ook bij veel algemenere golfvormen er ongeveer hetzelfde uitzien.

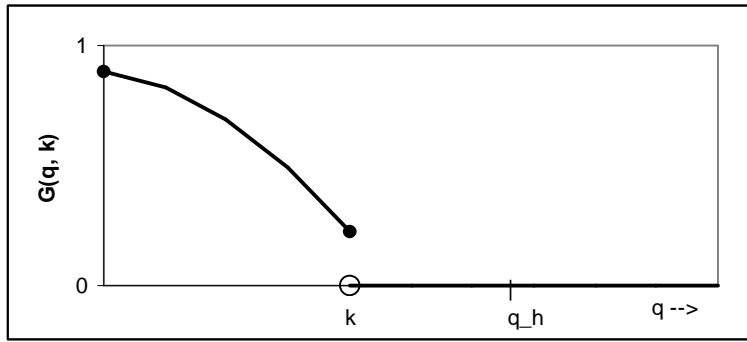
We zullen nu de LV-stelling toepassen op $G(q, k)$. Dat is nodig om aan te tonen dat (4.7) volgt uit (4.6). Iets preciezer geformuleerd is nodig dat het volgende geldt. Stel dat $I(q)$ voor $q \geq 0$ gegeven wordt door

$$(6.4) \quad I(q) = \int_q^\infty dk \, \psi(k) G(q, k)$$

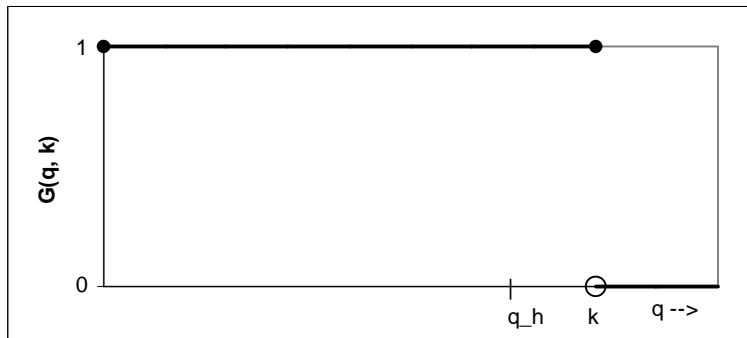
We dienen dan te laten zien dat, voor $0 < \beta < q_h$,

$$(6.5) \quad \frac{dI(\beta)}{d\beta} = -G(\beta, \beta) \psi(\beta) + \int_\beta^\infty dk \, \psi(k) \frac{dG(\beta, k)}{d\beta}$$

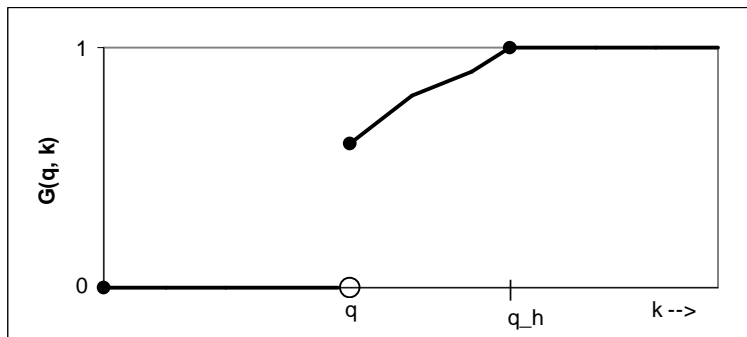
waarbij $\psi(k)$ de frequentiedichtheid van de afvoer geeft. Strikt genomen geldt (6.5) niet voor een grenswaarde β ter plaatse van een knik in de werklijn, omdat daar de $\psi(\beta)$ niet gedefinieerd is. Dat betreft slechts een wiskundig-technisch detail dat voor de praktijk niet relevant is, omdat door een willekeurig kleine aanpassing van de werklijn deze differentieerbaar gemaakt kan worden, waarna $\psi(\beta)$ wel bestaat.



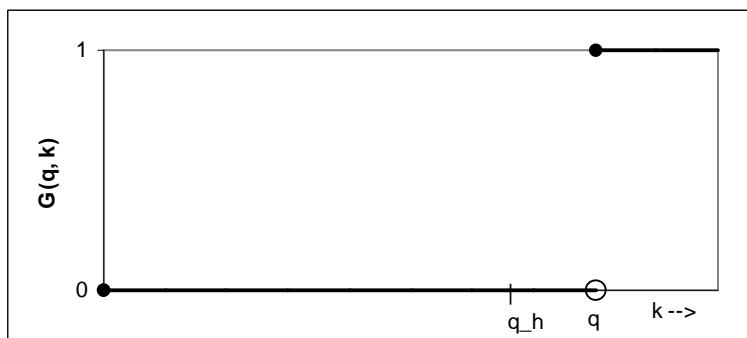
Figuur 5.2-a. Geval $b_0 > 0$, $0 < k < q_h$. Illustratie van de functie $q \rightarrow G(q, k)$. Hier is $G(k, k) = 1 - f(k)$.



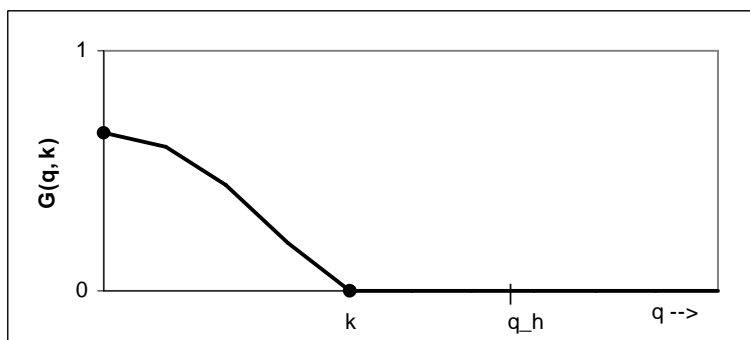
Figuur 5.2-b. Geval $b_0 > 0$, $k \geq q_h$. Illustratie van de functie $q \rightarrow G(q, k)$. Hier is $G(k, k) = 1$.



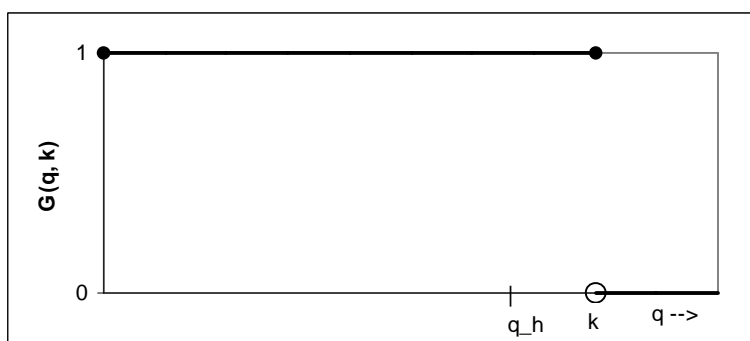
Figuur 5.2-c. Geval $b_0 > 0$, $0 \leq q < q_h$. Illustratie van de functie $k \rightarrow G(q, k)$. Hier is $G(q, q) = 1 - f(q)$.



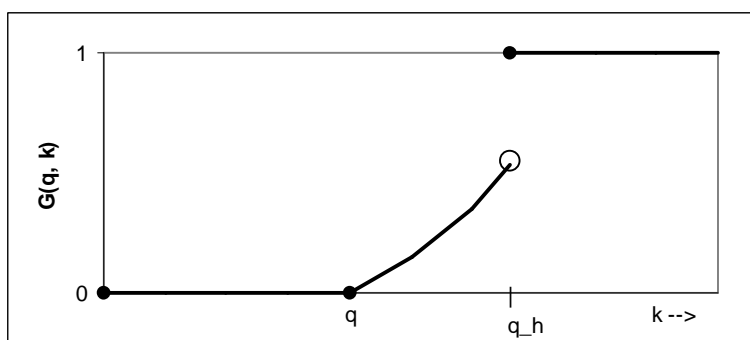
Figuur 5.2-d. Geval $b_0 > 0$, $q \geq q_h$. Illustratie van de functie $k \rightarrow G(q, k)$. Hier is $G(q, q) = 1$.



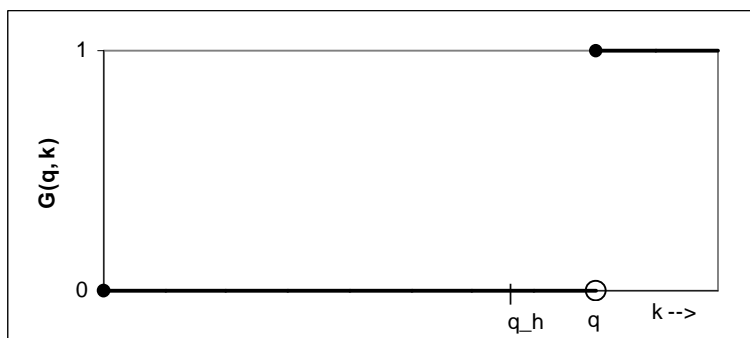
Figuur 5.3-a. Geval $b_0 = 0$, $0 < k < q_h$. Illustratie van de functie $q \rightarrow G(q, k)$. Hier is $G(k, k) = 0$.



Figuur 5.3-b. Geval $b_0 = 0$, $k \geq q_h$. Illustratie van de functie $q \rightarrow G(q, k)$. Hier is $G(k, k) = 1$. (Dit plaatje is identiek aan figuur 5.2-b.)



Figuur 5.3-c. Geval $b_0 = 0$, $0 \leq q < q_h$. Illustratie van de functie $k \rightarrow G(q, k)$. Hier is $G(q, q) = 0$. Het al of niet optreden van een discontinuïteit in $k = q_h$ hangt af van het preciese gedrag van $f(q)$.



Figuur 5.3-d. Geval $b_0 = 0$, $q \geq q_h$. Illustratie van de functie $k \rightarrow G(q, k)$. Hier is $G(q, q) = 1$. (Dit plaatje is identiek aan figuur 5.2-d.)

Formule (6.5) volgt uit de LV-stelling indien voldaan is aan de voorwaarden (5.1) tot en met (5.8) voor de keuzes

$$\begin{aligned} d &= 0 \\ f(q, k) &= G(q, k) \\ \varphi(k) &= \psi(k) \\ K &= \emptyset \text{ (de lege verzameling).} \end{aligned}$$

De genoemde voorwaarden worden nu bij langs gegaan, voor de hier genoemde keuzes. Bedenk dat steeds het trapezium als golfvorm wordt genomen, zodat geldt $dL(q, k)/dq = -(B_0 - b_0) / k$.

Voorwaarde (5.1)

De continuïteit in q van $G(q, k)$, zie definities (6.2) en (6.3), is evident voor $q > k$, omdat de functie dan nul is, en tevens evident voor $q < k$ indien $k \geq q_h$ omdat de functie dan 1 is, zie figuur 6.2-a, b en 6.3-a, b als toelichting. Voor $k < q_h$ volgt de continuïteit in q van $G(q, k)$ uit formule (6.2) en uit de continuïteit van $f(q)$.

Voorwaarde (5.2)

De golfvormen hebben de eigenschap dat $L(q, k_1) \geq L(q, k_0)$ als $k_1 > k_0$, ofwel, een hogere golfvorm is altijd breder dan een lagere, bij een vast beschouwd drempelniveau. Omdat $f(q)$ stijgend is kan dan eenvoudig worden aangetoond, met behulp van (3.5), dat dan $G(q, k)$ stijgend is in k , ofwel $G(q, k_1) \geq L(q, k_0)$ indien $k_1 > k_0 > 0$. Dus hogere golfvormen geven een hogere faalkans tijdens de passage van een afvoergolf dan lagere, wat nogal logisch is. Hiermee is voldaan aan voorwaarde (5.2) uit de LV-stelling. Merk op dat aan deze voorwaarde niet alleen is voldaan voor trapeziïen $L(q, k)$, maar voor zeer algemen golfvormen.

Voorwaarde (5.3)

Beschouw een vaste $k \in (d, \infty)$. Er dient te worden aangetoond dat dan $dG(q, k)/dq$ bestaat voor $q \in (d, \infty) \setminus \{k\}$. Beschouw eerst $k \geq q_h$. Uit (6.3) volgt dan onmiddellijk dat $dG(q, k)/dq = 0$ voor $q \neq k$, omdat voor $q < k$ de functie 1 is en voor $q > k$ de functie 0 is. Beschouw nu $k < q_h$. Voor $q > k$ is de functie 0, zodat $dG(q, k)/dq = 0$. Voor $q < k$ wordt $G(q, k)$ gegeven door formule (6.2), waarin de integrand $\ln(1-f(s)) dL(s, k)/ds$ voorkomt. Omdat $k < q_h$ is $f(s) < 1$ op het integratieinterval $q \leq s \leq k$, zodat de integrand continu is in s op het integratieinterval. Hieruit volgt dat de afgeleide naar de ondergrens q van de integraal bestaat, wat op zijn beurt impliceert dat $dG(q, k)/dq$ bestaat.

Voorwaarde (5.4)

Deze voorwaarde betreft continuïteitseisen aan $G(q, k)$ en levert het meeste werk om te verifiëren. De gevallen $b_0 = 0$ en $b_0 > 0$ dienen apart te worden onderscheiden.

Beschouw eerst $b_0 > 0$

Voor $0 < k < q_h$ volgt uit (6.2) en (6.3), omdat de integraal in (6.2) in deze situatie begrensd is,

$$(6.6) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k) = 1 - \tilde{f}(k) = G(k, k)$$

$$(6.7) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k+h) = \lim_{h \uparrow 0} (1 - \tilde{f}(k+h)) = 1 - \tilde{f}(k) = G(k, k)$$

Voor $k = q_h$ volgt

$$(6.8) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(q_h + h, q_h) = 1 = G(q_h, q_h)$$

$$(6.9) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(q_h + h, q_h + h) = \lim_{h \uparrow 0} (1 - \tilde{f}(q_h + h)) = 1 = G(q_h, q_h)$$

Voor $k > q_h$ volgt

$$(6.10) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k) = 1 = G(k, k)$$

$$(6.11) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k+h) = 1 = G(k, k)$$

Aldus is aangetoond, voor $k > 0$

$$(6.12) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k+h) = \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k) = G(k, k)$$

wat inhoudt dat aan de eerste twee gelijkheden uit (5.4) is voldaan, voor het geval $b_0 > 0$. Beschouw ten behoeve van de laatste gelijkheid uit (5.4) eerst $0 \leq q < q_h$. Dan geldt

$$(6.13) \quad \lim_{h \downarrow 0} G(q, q+h) = 1 - \tilde{f}(q) = G(q, q)$$

Voor $q > q_h$ volgt

$$(6.14) \quad \lim_{h \downarrow 0} G(q, q+h) = 1 = G(q, q)$$

Dit houdt in dat voor het geval $b_0 > 0$ aan (5.4) is voldaan voor alle $\beta > 0$.

Beschouw nu $b_0 = 0$

Voor $0 < k < q_h$ volgt

$$(6.15) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k) = 0 = \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k+h) = G(k, k)$$

Voor $k > q_h$ volgt

$$(6.16) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k) = 1 = \lim_{h \uparrow 0} G(k+h, k+h) = G(k, k)$$

Voor $k = q_h$ volgt

$$(6.17) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(q_h+h, q_h) = 1 = G(q_h, q_h)$$

$$(6.18) \quad \lim_{h \uparrow 0} G(q_h+h, q_h+h) = 0 \neq G(q_h, q_h)$$

Uit (6.15) t/m (6.18) blijkt dat aan de eerste twee ongelijkheden uit (5.4) is voldaan, voor het geval $b_0 = 0$, zij het met één uitzondering; voor $\beta = q_h$ is vanwege (6.18) niet voldaan aan de eerste ongelijkheid uit (5.4). Echter, de grenswaarde $\beta = q_h$ is in (6.5) uitgezonderd, zodat voor deze grenswaarde ook niet aan (5.4) voldaan hoeft te worden.

Rest nog de laatste gelijkheid uit (5.4) aan te tonen. Voor $0 \leq q < q_h$ volgt

$$(6.19) \quad \lim_{h \downarrow 0} G(q, q+h) = 0 = G(q, q)$$

en voor $q \geq q_h$ volgt

$$(6.20) \quad \lim_{h \downarrow 0} G(q, q+h) = 1 = G(q, q)$$

Aldus is op grond van bovenstaande, voor $b_0 \geq 0$, voldaan aan (5.4) voor alle $\beta > 0$, met uitzondering van het geval $\beta = q_h$ indien $b_0 = 0$. In het bijzonder is voldaan aan voorwaarde (5.4) voor de situatie $0 < \beta < q_h$, hetgeen moest worden aangetoond.

Voorwaarde (5.5) en (5.6)

Aan voorwaarde (5.5) is altijd voldaan omdat de integraal in (5.5), die loopt van 0 tot ∞ , de overschrijdingsfrequentie $\Psi(0)$ van de afvoerwaarde 0 oplevert, welke voor de hier beschouwde trapeziumgolven gelijk is aan B_0/N . (Voor meer algemene golfvormen zal $\Psi(0)$ eveneens eindig zijn.) De geldigheid van (5.6) is triviaal omdat hier $f(q, k) = G(q, k) \leq 1$.

Voorwaarde (5.7) en (5.8)

Neem aan dat $0 < \beta < q_h$ en beschouw $k > \beta$. Definieer nu $\varepsilon_{\beta,k} = \min\{k - \beta, (q_h - \beta)/2\}$. We zoeken nu een geschikte afschatting voor $q \rightarrow dG(q, k)/dq$. Allereerst geldt voor $k \geq q_h$, zie de behandeling van voorwaarde (5.3), dat dan simpelweg $dG(q, k)/dq = 0$ voor $q \neq k$. Voor $q = k$ is stilzwijgend aangenomen, zie de toelichting direct volgend op de LV-stelling, dat dan eveneens $dG(q, k)/dq = 0$. De enige relevante situatie om te beschouwen is derhalve $k < q_h$. In dat geval geldt voor $q \in (\beta - \varepsilon_{\beta,k}, \beta + \varepsilon_{\beta,k})$ dat $q < \beta + \varepsilon_{\beta,k} < (q_h + \beta)/2 < q_h$. In dat geval volgt uit (4.8) dat

$$(6.21) \quad \left| \frac{dG(q, k)}{dq} \right| \leq -\ln[1 - f((\beta + q_h)/2)] \frac{B_0 - b_0}{k}$$

Voor de 'begrenzende' functie $q_\beta(k)$ kan derhalve worden genomen

$$(6.22) \quad g_\beta(k) = \begin{cases} -\ln[1 - f((\beta + q_h)/2)] \frac{B_0 - b_0}{k} & , 0 < k < q_h \\ 0 & , k \geq q_h \end{cases}$$

Referenties

[Nota 61.002.17]

Waterstandfrequenties op de Beneden Merwede en de Boven Merwede. Notanummer 61.002.17. Directie Waterhuishouding en Waterbeweging, Distrikt Zuidwest, Dordrecht, september 1984.

[Billingsley, 1995]

Probability and Measure. P. Billingsley. Wiley, New York, 1995.

[Den Heijer, 1994]

Beheerdershandleiding van DIJKRING 4.0 (concept). F. den Heijer. DWW, 23 september 1994.

[Duits, 1998]

Gevoeligheidsanalyse Probabilistische Belastingsmodellen en Rekentechnieken. Deelrapport 3: locatie Duursche Waarden, faalmechanisme overloop en golfoverslag. M.T. Duits, A.C.W.M. Vrouwenvelder, C.F. de Valk, J.M. van Noortwijk, M. Kok. TNO, Argoss, HKV, 1998. (Opdrachtgever Rijkswaterstaat: RIZA, RIKZ, DWW.)

[Geerse, 2000a]

Probabilistisch model voor de IJsseldelta. Concept. C.P.M. Geerse. RIZA Lelystad, 27 juni 2000.

[Geerse, 2000b]

Probabilistisch model voor het Benedenrivierengebied. Concept. C.P.M. Geerse. RIZA Lelystad, 28 juni 2000.

[Geerse, 2001]

De standaardgolfvorm voor Rijn en Maas in samenhang met de consistentieproblematiek. C.P.M. Geerse. RIZA-Werkdocument 2001.121.x. RIZA, Lelystad, 30 juli 2001.

[Geerse, 2002]

De grenswaarde in Hydra_b in relatie tot FBC-modellen. RIZA-Werkdocument 2002.053x. RIZA, Lelystad, 20 februari 2002.

[Kalk, 2001]

Uitbreiding afvoerstatistiek – Borgharen, Lith, Lobith, Olst. H.J. Kalk, I.B.M. Lammers, C.P.M. Geerse. HKV Lijn in Water, Lelystad, december 2002.

[Klopstra, 1999a]

Applicatie standaard afvoergolven Maas en Rijn. D. Klopstra. HKV Lijn in water, Lelystad, september 1999.

[Klopstra, 1999b]

Methodiek voor vaststelling van de vorm van de maatgevende afvoergolf van de Rijn bij Lobith. D. Klopstra, M.T. Duits. HKV Lijn in water, Lelystad, december 1999.

[Volker, 1989]

Overbelasting van dijken tijdens hoge rivierafvoer. W.F. Volker. WBVO-N-89015. DWW, februari 1989.

[Vrouwenvelder, 2002]

Belastingmodellen Benedenrivierengebied - fase 2/eindconcept. A.C.W.M. Vrouwenvelder, H.M.G.M. Steenbergen, F.L.M. Diermanse. TNO-rapport 2001-CON-DYN-R8014. TNO-Bouw, 12 februari 2002.