

Onzekerheden in terugkeertijden van rivierafvoeren

548

9.9 548
DWW

PR560

september 2002

Opdrachtgever: Rijkswaterstaat Dienst Weg- en Waterbouwkunde



Rijkswaterstaat
Rijksinstituut voor
Integraal Zoetwaterbeheer en
Afvalwaterbehandeling
Documentatie
Postbus 17
8200 AA Lelystad

Onzekerheden in terugkeertijden van rivierafvoeren

Auteurs: J.M. van Noortwijk
H.J. Kalk

Inhoud

Lijst van tabellen.....	iii
Lijst van figuren.....	v
1 Inleiding	1
1.1 Aanleiding tot het project	1
1.2 Doelstelling	2
1.3 Leeswijzer	2
2 Terugkeertijd van extreme afvoeren	3
2.1 Werklijn voor het berekenen van de terugkeertijd	3
2.2 Onzekerheden in de terugkeertijd	5
2.3 Berekenen van de onzekerheidsbanden	8
3 Onzekerheden in de werklijn voor de Rijn	11
3.1 Bayesiaanse analyse	11
3.2 Werklijn met onzekerheidsverdeling.....	18
3.3 Resultaat voor de Rijn	21
4 Onzekerheden in de werklijn voor de Maas	23
4.1 Bayesiaanse analyse	23
4.2 Werklijn met onzekerheidsverdeling.....	29
4.3 Resultaat voor de Maas.....	32
5 Conclusies en aanbevelingen	33
6 Referenties	35
Bijlage A: Frequentie en kans	39
Bijlage B: Kansdichtheidsfuncties	43
Bijlage C: Onzekerheid in werklijn conform PC-Ring.....	45

Lijst van tabellen

Tabel 1: Kansverdelingen met aantal parameters en a priori en a posteriori Bayesgewichten voor de Rijn.	12
Tabel 2: Resultaten Bayesiaanse analyse voor de Rijn.....	14
Tabel 3: Gefitte variatiecoëfficiënten van de werklijnparameters voor de Rijn.	18
Tabel 4: Kansverdelingen met aantal parameters en a priori en a posteriori Bayesgewichten voor de Maas.	24
Tabel 5: Resultaten Bayesiaanse analyse voor de Maas.	25
Tabel 6: Gefitte variatiecoëfficiënten van de werklijnparameters voor de Maas.....	29
Tabel 7: Kansdichtheidsfuncties gebruikt in Bayesiaanse analyse.	43

Lijst van figuren

Figuur 1: De overschrijdingskans van de Rijnafvoer zonder onzekerheid in de parameters.	4
Figuur 2: De verwachte overschrijdingskans inclusief het 5de en 95ste percentiel met de A's volledig afhankelijk, de B's volledig afhankelijk en de A's onafhankelijk van de B's.....	7
Figuur 3: De verwachte overschrijdingskans inclusief het 5de en 95ste percentiel met de A's onafhankelijk, de B's onafhankelijk en de A's onafhankelijk van de B's.	8
Figuur 4: Bayesiaanse schatting van de overschrijdingkans voor negen kansverdelingen en een gewogen gemiddelde hiervan voor de Rijn.	13
Figuur 5: Bayesiaanse fits van de exponentiële, Rayleigh en normale verdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Rijn.	15
Figuur 6: Bayesiaanse fits van de lognormale, gamma- en Weibullverdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Rijn.	16
Figuur 7: Bayesiaanse fits van de Gumbel-, generaliseerde gamma- en gegeneraliseerde extreme-waardenverdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Rijn. ..	17
Figuur 8: Bayesiaanse schatting van overschrijdingskans en bijbehorend onzekerheidsinterval (vierkant) en benadering van overschrijdingskans en onzekerheidsinterval (asterisk) met variërende variatiecoëfficiënt voor de Rijn.	19
Figuur 9: Bayesiaanse schatting van overschrijdingskans en bijhorend onzekerheidsinterval (vierkant) en benadering van overschrijdingskans en bijhorend onzekerheidsinterval (asterisk) met deels variërende variatiecoëfficiënt voor de Rijn.	20
Figuur 10: Voorgestelde benadering van overschrijdingskans en bijhorend 90%-onzekerheidsinterval voor de Rijn.	21
Figuur 11: Bayesiaanse schatting van de overschrijdingkans voor negen kansverdelingen en een gewogen gemiddelde hiervan voor de Maas.	24
Figuur 12: Bayesiaanse fits van de exponentiële, Rayleigh en normale verdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Maas.	26
Figuur 13: Bayesiaanse fits van de lognormale, gamma- en Weibullverdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Maas.	27
Figuur 14: Bayesiaanse fits van de Gumbel-, generaliseerde gamma- en gegeneraliseerde extreme-waardenverdeling inclusief 90%-onzekerheidsinterval voor de Maas.	28
Figuur 15: Bayesiaanse schatting van overschrijdingskans en bijbehorend onzekerheidsinterval (vierkant) en benadering van overschrijdingskans en onzekerheidsinterval (asterisk) met variërende variatiecoëfficiënt voor de Maas. ..	30
Figuur 16: Bayesiaanse schatting van overschrijdingskans en bijhorend onzekerheidsinterval (vierkant) en benadering van overschrijdingskans en bijhorend onzekerheidsinterval (asterisk) met deels variërende variatiecoëfficiënt voor de Maas.	31
Figuur 17: Voorgestelde benadering van overschrijdingskans en bijhorend 90%-onzekerheidsinterval voor de Maas.	32
Figuur 18: Frequentie en kans als functie van de gemiddelde terugkeertijd.	40

1 Inleiding

1.1 Aanleiding tot het project

Ten behoeve van het onderzoeksproject “Veiligheid Nederland in Kaart” (VNK) is een methode ontwikkeld om overstromingskansen te berekenen van dijkringgebieden. Deze methode is geïmplementeerd middels het PC programma PC-Ring.

Voor het berekenen van overstromingskansen is de afvoer een belangrijke belastingsvariabele. De natuurlijke fluctuatie van de afvoer in de tijd is in PC-Ring gemodelleerd door middel van een frequentieverdeling, de zogenoemde werklijn. Voor zowel de Bovenrijn bij Lobith als de Maas bij Borgharen bestaat deze werklijn uit drie stukken. Indien de frequentie op logaritmische schaal wordt weergegeven, dan zijn de drie delen van de werklijn alle een rechte lijn. Elk deel wordt gerepresenteerd door twee parameters, een A en een B , die de relatie beschrijven tussen de rivierafvoer q en de gemiddelde terugkeertijd t : dat wil zeggen $q = A + B \ln(t)$. Bij het bepalen van deze werklijn spelen statistische onzekerheden echter een grote rol. Zo is voor het schatten van de maatgevende Rijnaflow (met een terugkeertijd van 1250 jaar) een meetreeks beschikbaar van amper 100 jaar.

De twee belangrijkste onzekerheden, waarmee rekening moet worden gehouden bij het bepalen van een maatgevende afvoer zijn de inherente en de statistische onzekerheid. Inherente onzekerheid betreft de onzekerheid die van nature in het fysisch proces van de rivierafvoer aanwezig is. Vanwege de natuurlijke fluctuatie in de tijd is het bijvoorbeeld niet mogelijk om de afvoer van volgende week of volgend jaar exact te voorspellen. Statistische onzekerheid ontstaat indien er voor het schatten van de parameters van een kansverdeling (bijvoorbeeld de werklijn) te weinig gegevens beschikbaar zijn. Hoe meer waarnemingen, des te kleiner is de statistische onzekerheid. Ook de onzekerheid met betrekking tot de keuze van het type kansverdeling behoort tot de statistische onzekerheid.

Voor het schatten van kansverdelingen, waarmee zowel inherente als statistische onzekerheid kan worden gemodelleerd, is de Bayesiaanse statistiek geschikt. Om de Bayesiaanse statistiek te kunnen gebruiken voor het kwantificeren van onzekerheden in extreme belastingen is in juli 1999 door Rijkswaterstaat RIZA en HKV LIJN IN WATER een samenwerkingsovereenkomst getekend. In deze overeenkomst is afgesproken, dat een statistisch pakket wordt ontwikkeld, waarin Bayesiaanse statistiek wordt gebruikt. Met dit Bayesiaanse pakket, dat eind 2002 beschikbaar komt, kunnen gemiddelde terugkeertijden worden bepaald van onder meer extreme rivierafvoeren, zeewaterstanden en windsnelheden rekening houdend met statistische onzekerheden. Zo wordt een beter inzicht verkregen in de onzekerheid in de terugkeertijden.

Idealiter zouden de resultaten van zo'n Bayesiaanse analyse direct in PC-Ring moeten worden opgenomen. Vanwege de vele belasting- en sterktevariabelen, faalmechanismen en dijkkringvakken en hun afhankelijkheden is deze aanpak vooralsnog niet mogelijk. In PC-Ring is dan ook gekozen voor een vereenvoudigde aanpak, waarbij de zes parameters (drie maal een A en driemaal een B) alle normaal verdeeld verondersteld zijn met de A 's volledig afhankelijk, de B 's volledig afhankelijk en de A 's onafhankelijk van de B 's. Deze methode is conform de aanpak die gevolgd is het project Onzekerheidsanalyse Inundatiekans (ONIN) (zie Frijters en Slijkhuis, 1998).

Een probleem is dat de variatiecoëfficiënten¹ van de onzekerheidsverdelingen van de werklijnparameters niet bijgewerkt zijn op basis van de meest recente afvoermetingen. Zij horen namelijk nog bij de werklijn van 1993. Deze variatiecoëfficiënten zouden dus voor de werklijn van 2001 opnieuw moeten worden bepaald. De meest voor de hand liggende methode is om de onzekerheden in de werklijnparameters te fitten op de resultaten van een recente Bayesiaanse analyse. Het gaat hierbij dan niet om het bepalen van een nieuwe schatting van de maatgevende afvoer, maar om het kwantificeren van de statistische onzekerheden. De voorgestelde methode komt neer op het fitten van de 90%-onzekerheidsintervallen (het 5de en 95ste percentiel) van het jaarmaximum van de afvoer op basis van een Bayesiaanse analyse. Voor het berekenen van een Bayesiaans 90%-onzekerheidsinterval is het voornoemde programma 'Bayesiaanse Statistiek' gebruikt.

1.2 Doelstelling

De doelstelling van het project 'Onzekerheden in terugkeertijden van rivierafvoeren' is tweeledig:

1. Het beschrijven van de methode waarmee er in PC-Ring op dit moment wordt omgegaan met de statistische onzekerheid in de parameters van de werklijn voor de Bovenrijn bij Lobith. Op analoge wijze kan de statistische onzekerheid in de werklijn voor de Maas worden gekwantificeerd.
2. Het fitten van de 90%-onzekerheidsintervallen (het 5de en 95ste percentiel) van de terugkeertijden van het jaarmaximum van de afvoer volgens de werklijn op basis van een Bayesiaanse analyse. Deze onzekerheidsintervallen zullen worden bepaald voor zowel de Bovenrijn bij Lobith als de Maas bij Borgharen. De Bayesiaanse 90%-onzekerheidsintervallen zullen met het programma 'Bayesiaanse Statistiek' worden berekend. De uiteindelijke fit zal de vorm hebben van een meerdimensionale normale verdeling van de werklijnparameters, welke geschikt zal zijn voor eenvoudige implementatie in PC-Ring.

1.3 Leeswijzer

Dit rapport is als volgt opgebouwd. In Hoofdstuk 2 wordt beschreven hoe de statistische onzekerheid van een afvoerwerklijn kan worden gekwantificeerd. Enerzijds wordt er in paragraaf 2.1 uitgelegd hoe er in PC-Ring bij benadering met deze statistische onzekerheid wordt omgegaan; anderzijds wordt in paragraaf 2.2 beargumenteerd hoe Bayesiaanse statistiek idealiter zou kunnen worden gebruikt voor het bepalen van de statistische onzekerheid. Paragraaf 2.3 presenteert een benaderingsmethode die de resultaten van een uitgebreide Bayesiaanse analyse geschikt maken voor eenvoudige implementatie in PC-Ring. Voor dit doel zijn de variatiecoëfficiënten van de werklijnparameters bepaald voor zowel de Bovenrijn bij Lobith (Hoofdstuk 3) als de Maas bij Borgharen (Hoofdstuk 4). Conclusies en aanbevelingen zijn ten slotte opgenomen in Hoofdstuk 5. Verder bevat dit rapport drie bijlagen: één over de relatie tussen frequentie en kans (Bijlage A), één over de in de Bayesiaanse analyse gebruikte kansdichtheidsfuncties (Bijlage B) en één over hoe de onzekerheid in de werklijn op dit moment in PC-Ring is geïmplementeerd (Bijlage C).

¹ De variatiecoëfficiënt is gelijk aan het quotiënt van de standaarddeviatie en de verwachting.

2 Terugkeertijd van extreme afvoeren

Dit hoofdstuk gaat nader in op het kwantificeren van statistische onzekerheden in de werklijn voor het bepalen van terugkeertijden van extreme afvoeren. Als voorbeeld wordt de werklijn van de Rijn gebruikt, waarvan de formules zijn opgenomen in paragraaf 2.1. De voorgestelde methodiek voor het specificeren van statistische onzekerheid in de werklijn wordt gepresenteerd in paragraaf 2.2. De methodiek is gebaseerd op het fitten van de onzekerheidsbanden van de werklijn op basis van resultaten van een Bayesiaanse analyse (paragraaf 2.3).

2.1 Werklijn voor het berekenen van de terugkeertijd

Conform Deel B van de theoriehandleiding van PC-Ring (Vrouwenvelder, Steenberg en Slijkhuis, 2001) kan de gemiddelde terugkeertijd van extreme rivierafvoeren worden berekend met de zogenoemde 'werklijn'. De werklijn is een stuksgewijze exponentiële kansverdeling bestaande uit meerdere delen, waarmee de gemiddelde terugkeertijd van een extreme afvoer kan worden berekend. De formule voor ieder deel van de werklijn is $q = A + B \ln(t)$ met q de rivierafvoer [m^3/s] en t de gemiddelde terugkeertijd [jaren]. De waarden van A en B die horen bij de meest recente werklijn van de Bovenrijn bij Lobith bestaande uit drie delen zijn als volgt (Kalk, Lammers en Geerse, 2001):

$$\begin{aligned} A_1 &= 5893.30; & B_1 &= 1620.70; \\ A_2 &= 5964.63; & B_2 &= 1517.78; \\ A_3 &= 6612.61; & B_3 &= 1316.43. \end{aligned} \quad (1)$$

De formule voor de gehele werklijn inclusief de twee snijpunten gevormd door de drie afzonderlijke delen is

$$q = \begin{cases} A_1 + B_1 \ln(t), & 1 \leq t < \exp\left\{-\frac{A_2 - A_1}{B_2 - B_1}\right\}, \\ A_2 + B_2 \ln(t), & \exp\left\{-\frac{A_2 - A_1}{B_2 - B_1}\right\} \leq t < \exp\left\{-\frac{A_3 - A_2}{B_3 - B_2}\right\}, \\ A_3 + B_3 \ln(t), & \exp\left\{-\frac{A_3 - A_2}{B_3 - B_2}\right\} \leq t, \end{cases} \quad (2)$$

ofwel

$$\frac{1}{t} = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{q - A_1}{B_1}\right\}, & A_1 \leq q < \frac{B_2 A_1 - B_1 A_2}{B_2 - B_1}, \\ \exp\left\{-\frac{q - A_2}{B_2}\right\}, & \frac{B_2 A_1 - B_1 A_2}{B_2 - B_1} \leq q < \frac{B_3 A_2 - B_2 A_3}{B_3 - B_2}, \\ \exp\left\{-\frac{q - A_3}{B_3}\right\}, & \frac{B_3 A_2 - B_2 A_3}{B_3 - B_2} \leq q. \end{cases} \quad (3)$$

Hierbij is de reciproque van de gemiddelde terugkeertijd, $1/t$, gelijk aan de frequentie van voorkomen van de afvoer q [1/jaar]. Met de volgende vereenvoudigde formulering is het uitrekenen van de snijpunten van de afzonderlijke werklindelen niet nodig:

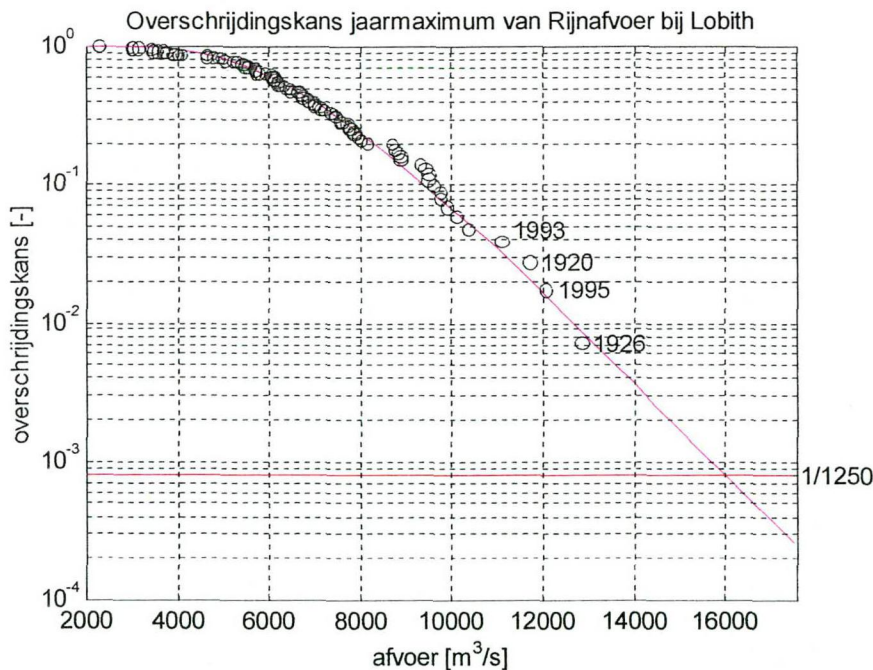
$$\frac{1}{t} = \min \left\{ \exp \left\{ -\frac{q - A_1}{B_1} \right\}, \exp \left\{ -\frac{q - A_2}{B_2} \right\}, \exp \left\{ -\frac{q - A_3}{B_3} \right\} \right\} \quad (4)$$

Deze vergelijking is als zodanig ook geïmplementeerd in PC-Ring (zie ook Bijlage C).

Voor het berekenen van de kans op voorkomen van een extreme afvoer per jaar dient bovenstaande frequentie $1/t$ nog te worden omgerekend van frequentie naar kans. De manier waarop dit kan worden gedaan, is uitgebreid beschreven in Bijlage A. Gegeven dat de gemiddelde terugkeertijd gelijk is aan t jaar is op basis van formule (A.5) uit deze bijlage de kans op overschrijden van een afvoer q per jaar gelijk aan:

$$\Pr\{Q > q\} = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{t} \right\}. \quad (5)$$

De overschrijdingskans is hiermee gedefinieerd als de kans dat de afvoer in een jaar één of meerdere malen een gegeven waarde overschrijdt (zie Figuur 1). Naast de van frequentie naar kans getransformeerde werklijn is in deze figuur tevens de empirische overschrijdingskans op basis van de 98 waarnemingen weergegeven. De empirische overschrijdingskans is bepaald met de formule van Chegodayev (zie Kok et al., 1996, Bijlage B).



Figuur 1: De overschrijdingskans van de Rijnafvoer zonder onzekerheid in de parameters.

2.2 Onzekerheden in de terugkeertijd

De hierboven gepresenteerde werklijn kan worden gebruikt voor het bepalen van de maatgevende Rijnaafvoer met een terugkeertijd van 1250 jaar. Bij het toepassen van de werklijn spelen onzekerheden echter een grote rol. Zo was voor het vaststellen van de werklijn slechts een meetreeks beschikbaar van amper 100 jaar. De maatgevende afvoer wordt in wezen dus bepaald door middel van statistische extrapolatie. De twee belangrijkste onzekerheden waarmee rekening moet worden gehouden bij het bepalen van de maatgevende afvoer zijn de statistische en de inherente onzekerheid.

Statistische onzekerheid ontstaat indien er voor het schatten van de parameters van een kansverdeling te weinig gegevens beschikbaar zijn. Hoe meer waarnemingen, des te kleiner is de statistische onzekerheid. Ook de onzekerheid met betrekking tot de keuze van het type kansverdeling behoort tot de statistische onzekerheid. In de afleiding van de werklijn is nog niet voldoende rekening gehouden met statistische onzekerheid.

Inherente onzekerheid betreft de onzekerheid die van nature in het fysisch proces van de rivierafvoer aanwezig is. Vanwege de natuurlijke fluctuaties in de tijd is het bijvoorbeeld niet mogelijk om de afvoer van volgende week of volgend jaar exact te voorspellen. De werklijn is een voorbeeld van een probabilistisch model waarmee de inherente onzekerheid in de tijd van de afvoer kan worden gemodelleerd.

Voor het schatten van kansverdelingen, waarmee zowel inherente als statistische onzekerheid kan worden gemodelleerd, is de Bayesiaanse statistiek geschikt. Om de Bayesiaanse statistiek te kunnen gebruiken voor het kwantificeren van onzekerheden in extreme belastingen is in juli 1999 door Rijkswaterstaat RIZA en HKV LIJN IN WATER een samenwerkingsovereenkomst getekend. In deze overeenkomst is afgesproken, dat een statistisch pakket wordt ontwikkeld, waarin Bayesiaanse statistiek wordt gebruikt. Met dit Bayesiaanse pakket dat eind 2002 beschikbaar komt, kunnen op een nieuwe manier gemiddelde terugkeertijden worden bepaald van onder meer extreme rivierafvoeren, zeewaterstanden en windsnelheden. Zo wordt een beter inzicht verkregen in de onzekerheid in de terugkeertijden. De methodiek die ten grondslag ligt aan het statistisch pakket 'Bayesiaanse Statistiek' is beschreven in Chbab en van Noortwijk (2002) en van Noortwijk et al. (2002).

Idealiter zouden de resultaten van zo'n Bayesiaanse analyse direct in PC-Ring moeten worden opgenomen. Vanwege de vele belasting- en sterktevariabelen, faalmechanismen en dijkkringvakken en hun afhankelijkheden is deze aanpak vooralsnog niet mogelijk. In PC-Ring is dan ook gekozen voor een vereenvoudigde aanpak gebaseerd op de werklijn, waarbij de zes werklijnparameters (drie maal een A en driemaal een B) alle normaal verdeeld verondersteld zijn. Verder is ter vereenvoudiging aangenomen dat zowel de drie A -parameters als de drie B -parameters volledig afhankelijk zijn, terwijl de A 's en B 's onderling onafhankelijk zijn. Deze methode is conform de aanpak die gevolgd is in het ONIN-project (Frijters en Slijkhuis, 1998).

In het ONIN-project is indertijd besloten om de parameters van de kansverdelingen zo te kiezen dat de verwachte waarden gelijk zijn aan de oorspronkelijke deterministische waarden met als variatiecoëfficiënten (quotiënt van de standaarddeviatie en de verwachting)

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\mu_A} = 0.03, \quad CV_B = \frac{\sigma_B}{\mu_B} = 0.22 \quad (6)$$

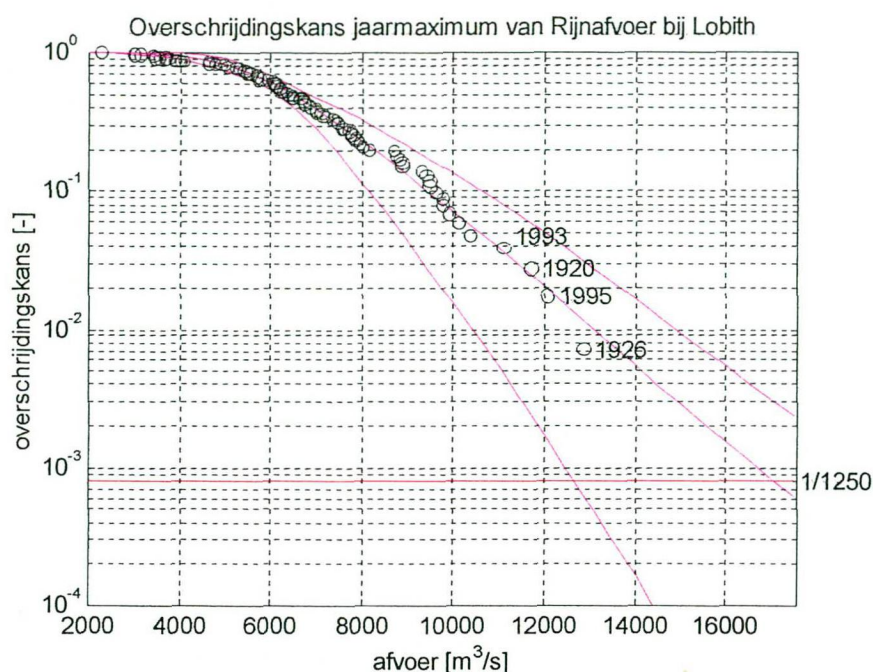
(Slijkhuis, 1998). Deze variatiecoëfficiënten horen bij de werklijn voor de Rijn van 1993. Zij zijn bepaald op basis van de Bayesiaanse analyse van jaarmaxima uitgevoerd in het kader van het project Integrale Verkenning inrichting Rijntakken (Kok et al., 1996, Bijlage B). De verwachte maatgevende afvoer was in dit onderzoek gelijk aan $15550 \text{ m}^3/\text{s}$, met als 5de en 95ste percentiel respectievelijk $12600 \text{ m}^3/\text{s}$ en $18100 \text{ m}^3/\text{s}$.

Het doel van het onderhavige onderzoek is om deze variatiecoëfficiënten op basis van een uitgebreidere waarnemingenreeks (1901-1998) opnieuw te bepalen. De meest voor de hand liggende methode is om de onzekeerheden in de werklijnparameters te fitten op de resultaten van een recente Bayesiaanse analyse van deze reeks. Het gaat hierbij dan niet om het bepalen van een nieuwe schatting van de maatgevende afvoer, maar om het kwantificeren van de statistische onzekeerheden. De voorgestelde methode komt neer op het fitten van de 90%-onzekeerheidsintervallen (het 5de en 95ste percentiel) van de werklijn op die van de Bayesiaanse analyse. De maatgevende afvoer rekening houdend met statistische onzekeerheid is overigens groter dan de maatgevende afvoer zonder onzekeerheid (vergelijk bijvoorbeeld Figuur 1 en Figuur 2).

In de Bayesiaanse analyse is een negental kansverdelingen gefit op jaarmaxima: de exponentiële, Rayleigh, normale, lognormale, gamma, Weibull, Gumbel, gegeneraliseerde gamma en gegeneraliseerde extreme waarden. Er konden zogenaamde Bayesgewichten worden berekend, die afhankelijk zijn van de kwaliteit van de fit. De Bayesgewichten zijn gedefinieerd op basis van Bayesfactoren, die uitvoerig beschreven zijn in het overzichtsartikel van Kass en Raftery (1995). Bayesfactoren kunnen worden toegepast om, uitgaande van a priori kansen dat bepaalde hypothesen, kansmodellen of kansverdelingen juist zijn, de a posteriori kansen te bepalen wanneer waarnemingen beschikbaar zijn. De termen 'a priori' en 'a posteriori' betekenen hier respectievelijk 'voordat de waarnemingen beschikbaar zijn' en 'nadat de waarnemingen beschikbaar zijn'. De bijbehorende Bayesgewichten zijn groter naarmate de waarschijnlijkheid van optreden van de waarnemingen groter is. Bij het berekenen van de waarschijnlijkheid van de waarnemingen worden statistische onzekeerheden uitgeïntegreerd. Hierbij wordt aangenomen dat er – voordat er waarnemingen beschikbaar zijn – geen a priori informatie aanwezig is. Dit kan worden bewerkstelligd door te veronderstellen dat de a priori kansverdeling van de statistische parameters een zogenoemde niet-informatieve Jeffreys-verdeling is (Jeffreys, 1961, Hoofdstuk 3-4; Box en Tiao, 1973, Hoofdstuk 1). De resulterende overschrijdingskans is gedefinieerd als het gewogen gemiddelde van de per kansverdeling geschatte overschrijdingskansen. De gewogen middeling vindt plaats over de afzonderlijke overschrijdingskansen op basis van de berekende Bayesgewichten.

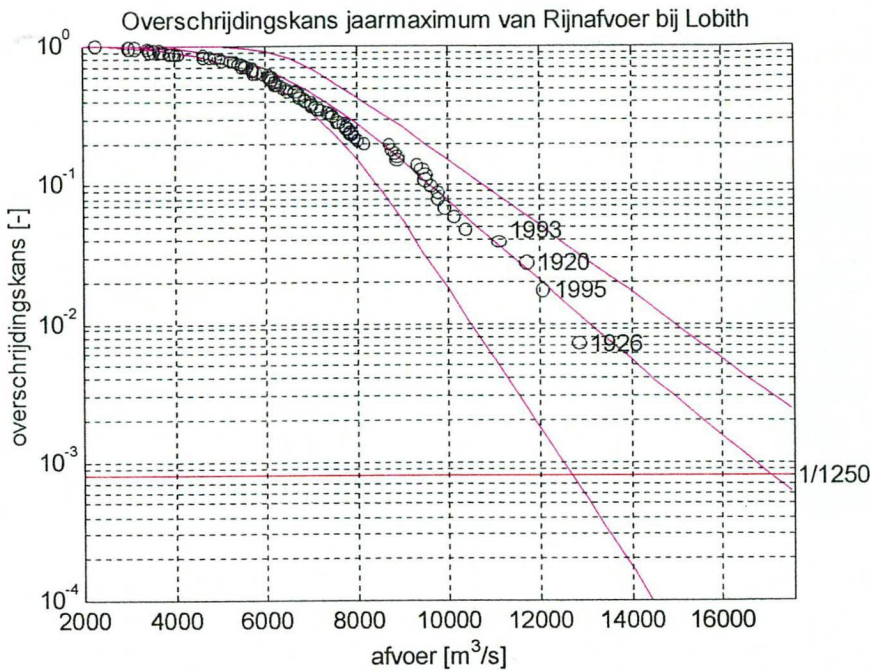
Samenvattend is het doel om de variatiecoëfficiënten van A_i , $i = 1, 2, 3$, en B_i , $i = 1, 2, 3$, te bepalen, waarbij de A 's volledig afhankelijk zijn, de B 's volledig afhankelijk zijn en de A 's onafhankelijk zijn van de B 's. De werklijn zoals die op dit moment in PC-Ring geïmplementeerd is (met onzekeerheid in de statistische parameters en bovenstaande afhankelijkheidsstructuur) is weergegeven in Figuur 2. De kansverdeling van de A 's en B 's heeft als verwachtingen de waarden behorende bij de werklijn uit vergelijking (1). De variatiecoëfficiënt voor de A 's is gelijk aan 0.03 en voor de B 's gelijk aan 0.22. De werklijn in Figuur 2 is met behulp van vergelijking (5) omgerekend van overschrijdingsfrequentie naar overschrijdingskans. In de figuur zijn zowel de verwachte waarde als het 90%-onzekeerheidsinterval (in de vorm van het 5de en 95ste percentiel) weergegeven. Deze zijn beide berekend met behulp van Monte-Carlo-simulatie, waarbij 10000 trekkingen zijn gedaan uit de onzekeerheidsverdeling van de werklijnparameters.

De maatgevende afvoer rekening houdend met statistische onzekerheid is $17072 \text{ m}^3/\text{s}$. Dit is veel groter dan de maatgevende afvoer zonder statistische onzekerheid ($16000 \text{ m}^3/\text{s}$).



Figuur 2: De verwachte overschrijdingskans inclusief het 5de en 95ste percentiel met de A 's volledig afhankelijk, de B 's volledig afhankelijk en de A 's onafhankelijk van de B 's.

Om te onderzoeken of het ook mogelijk is om alle werklijnparameters onderling onafhankelijk te veronderstellen is er een tweede Monte-Carlo-simulatie (met 10000 trekkingen) uitgevoerd. De overschrijdingskans inclusief het 90%-onzekerheidsinterval, waarbij de A 's volledig onafhankelijk zijn, de B 's volledig onafhankelijk zijn en de A 's onafhankelijk zijn van de B 's is weergegeven in Figuur 3. Vanwege de onafhankelijkheid is het nu mogelijk dat er niet-realistische combinaties van B_1 , B_2 en B_3 worden getrokken, waarvoor niet meer geldt dat $B_1 > B_2 > B_3$ maar bijvoorbeeld wel $B_1 > B_2$ maar niet $B_2 > B_3$. In Figuur 3 is te zien dat vooral het 95ste percentiel (de bovenste onzekerheidsband) van de overschrijdingskans van afvoeren kleiner dan $10000 \text{ m}^3/\text{s}$ wordt overschat. Gezien bovenstaande resultaten is de werklijn met onzekerheid in de statistische parameters, waarbij de A 's volledig afhankelijk zijn, de B 's volledig afhankelijk zijn en de A 's onafhankelijk zijn van de B 's aan te bevelen.



Figuur 3: De verwachte overschrijdingskans inclusief het 5de en 95ste percentiel met de A 's onafhankelijk, de B 's onafhankelijk en de A 's onafhankelijk van de B 's.

2.3 Berekenen van de onzekerheidsbanden

Deze paragraaf gaat nader in op het fitten van de werklijn met statistische onzekerheid op de resultaten van de Bayesiaanse analyse. De fit is zodanig bepaald dat het 5de en 95ste percentiel van de onzekerheidsverdelingen van de overschrijdingskansen volgens de werklijn zoveel mogelijk overeenkomen met die volgens de Bayesiaanse analyse. Voor het bepalen van deze fit is MATLAB-code geschreven, waarbij de fout tussen het benaderde onzekerheidsinterval en het Bayesiaanse onzekerheidsinterval zo klein mogelijk is.

In wiskundige termen wordt de fit als volgt bepaald. We zijn op zoek naar twee variatiecoëfficiënten CV_A en CV_B (één voor de A 's en één voor de B 's) zodanig dat het 5de en 95ste percentiel van de overschrijdingskans van de werklijn zo dicht mogelijk bij die van de Bayesiaanse analyse liggen. Zij q_i , $i = 1, \dots, n_1$, een reeks afvoeren waarvoor het Bayesiaanse 5de percentiel van de overschrijdingskans bekend is en \tilde{q}_i , $i = 1, \dots, n_2$, een reeks afvoeren waarvoor het Bayesiaanse 95ste percentiel van de overschrijdingskans bekend zijn. We duiden deze Bayesiaanse percentielen respectievelijk aan met $p_{0.05}^{Bayes}(q_i)$ voor $i = 1, \dots, n_1$ en $p_{0.95}^{Bayes}(\tilde{q}_i)$ voor $i = 1, \dots, n_2$. Als functie van de variatiecoëfficiënten CV_A en CV_B definiëren we de percentielen die horen bij de werklijn met statistische onzekerheid als $p_{0.05}^{werklijn}(q_i; CV_A, CV_B)$ voor $i = 1, \dots, n_1$ en $p_{0.95}^{werklijn}(\tilde{q}_i; CV_A, CV_B)$ voor $i = 1, \dots, n_2$. We bepalen de variatiecoëfficiënten CV_A en CV_B nu zodanig dat de absolute waarden van de logaritmische afstand tussen de percentielen volgens de Bayesiaanse analyse en die van de werklijn met onzekerheden zo klein mogelijk is. Om dit te bewerkstelligen kan de doelfunctie

$$h(CV_A, CV_B) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \left| \ln \left(\frac{p_{0.05}^{werklijn}(q_i; CV_A, CV_B)}{p_{0.05}^{Bayes}(q_i)} \right) \right| + \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \left| \ln \left(\frac{p_{0.95}^{werklijn}(\tilde{q}_i; CV_A, CV_B)}{p_{0.95}^{Bayes}(\tilde{q}_i)} \right) \right| \quad (7)$$

worden geminimaliseerd als functie van de variatiecoëfficiënten CV_A en CV_B (we gebruiken hiervoor de MATLAB-functie 'fmins'). De minimale waarde van de doelfunctie $h(CV_A, CV_B)$ is gelijk aan nul en treedt op als het 90%-onzekerheidsinterval volgend uit de werklijn met onzekerheden precies gelijk is aan het 90%-onzekerheidsinterval volgend uit de Bayesiaanse analyse. In de praktijk zal slechts een combinatie van variatiecoëfficiënten CV_A en CV_B gevonden kunnen worden waarvoor de doelfunctie $h(CV_A, CV_B)$ bijna gelijk is aan nul. Gegeven de ruwe aanname van normale verdelingen voor de werklijnparameters kan een exacte fit namelijk hoogstwaarschijnlijk niet gevonden worden.

3 Onzekerheden in de werklijn voor de Rijn

De werklijn voor de Bovenrijn bij Lobith is een stuksgewijze exponentiële verdeling bestaande uit drie delen. Met deze werklijn kunnen terugkeertijden voor het optreden van extreme rivierafvoeren worden berekend. Het doel van dit hoofdstuk is om op basis van de Bayesiaanse analyse in paragraaf 3.1 de statistische onzekerheid in de werklijn voor de Bovenrijn bij Lobith te kwantificeren. Om een eenvoudige implementatie in PC-Ring te garanderen is aangenomen dat de onzekerheidsverdeling van de werklijnparameters een meerdimensionale normale verdeling is. De parameters van deze normale verdeling zullen worden geschat in paragraaf 3.2. Een samenvatting van de resultaten voor de Rijn is te vinden in paragraaf 3.3.

3.1 Bayesiaanse analyse

De onzekerheidsverdeling van werklijnparameters is gefit op de resultaten van een volledige Bayesiaanse analyse van jaarmaxima van Bovenrijnafvoeren bij Lobith. Het betreft een meetreeks uit de periode 1901–1998 met jaarmaxima die voor 1977 gehomogeniseerd zijn (Parmet et al., 2000a, Bijlage 2). Voor de theorie die ten grondslag ligt aan de toegepaste Bayesiaanse analyse zij verwezen naar van Noortwijk et al. (2002). In de analyse zijn de volgende negen kansverdelingen bestudeerd:

1. Exponentieel
2. Rayleigh
3. Normaal
4. Lognormaal
5. Gamma
6. Weibull
7. Gumbel
8. Gegeneraliseerde gamma
9. Gegeneraliseerde extreme waarden

De kansdichtheidsfuncties van deze verdelingen zijn weergegeven in Bijlage B. Voor deze kansverdelingen zijn gewichten berekend al naar gelang hoe goed een bepaalde kansverdeling past bij de waargenomen afvoeren (zie Tabel 1). De Rayleighverdeling blijkt het beste bij de waarnemingen te passen. De Bayesiaanse schatting van de maatgevende afvoer is $16040 \text{ m}^3/\text{s}$. De resultaten zijn te vinden in Figuur 4 en Tabel 2. In deze Bayesiaanse analyse zijn alle parameters van de kansverdelingen onzeker verondersteld (inclusief de locatieparameters). De rekentechniek die is toegepast is Markov Chain Monte Carlo (MCMC) met 10000 trekkingen. MCMC-simulatie kan worden gebruikt om (afhankelijke) trekkingen te doen uit de a posteriori kansverdeling van de statistische parameters. MCMC betreft in wezen Monte-Carlo-integratie gebruikmakend van een slim geconstrueerde Markov-keten. De keten is zo geconstrueerd dat de trekkingen precies verdeeld zijn volgens de a posteriori kansverdeling van de onzekere statistische parameters.

In Figuur 4 zijn tevens de 90%-onzekerheidsbanden weergegeven voor de Bayesiaanse (gecombineerde) kansverdeling. Deze onzekerheidsbanden zijn bepaald met behulp van de onzekerheidsbanden van de negen afzonderlijke kansverdelingen in combinatie met de bijbehorende Bayesegewichten. Voor elke kansverdeling is de Bayesiaanse schatting van de overschrijdingskans met het bijbehorende 90%-onzekerheidsinterval weergegeven in Figuur 5

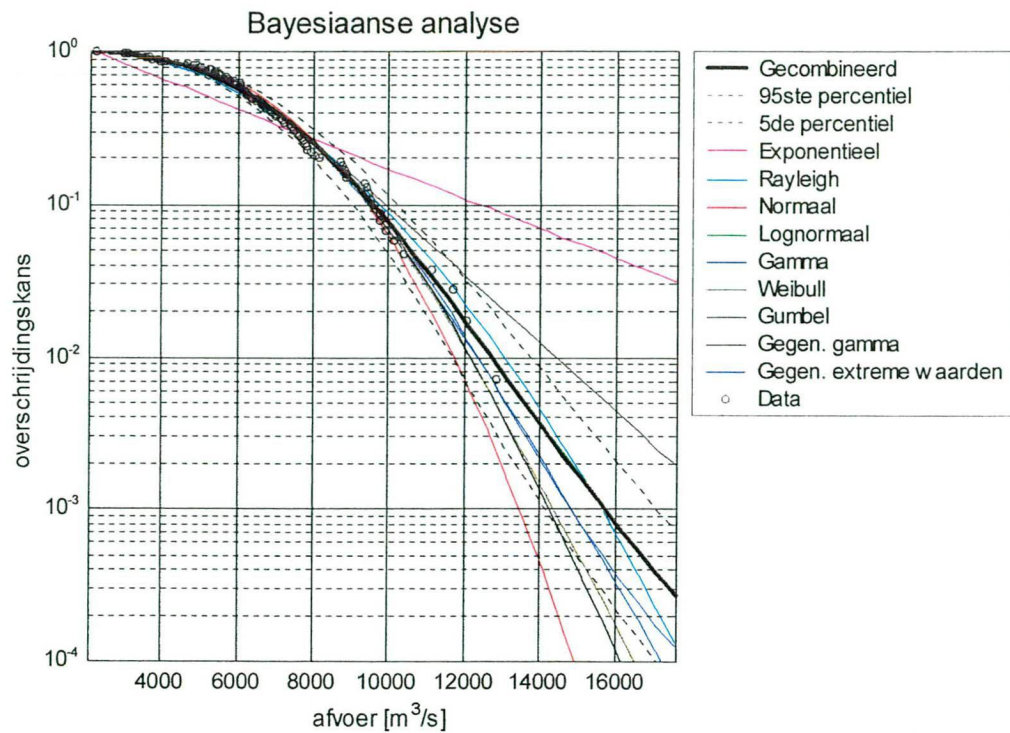
tot en met Figuur 7. Merk op dat deze onzekerheidsbanden breder worden (grotere onzekerheid hebben) naarmate het aantal parameters van een kansverdeling toeneemt.

De resultaten van de Bayesiaanse analyse gepresenteerd in Tabel 2 verschillen van die in Chbab et al. (2000) en van Noortwijk et al. (2001). In de huidige analyse zijn er namelijk negen in plaats van zeven kansverdelingen in de analyse betrokken en is er bovendien rekening gehouden met statistische onzekerheid in de locatieparameters.

Omdat de Rayleighverdeling een veel groter gewicht heeft – en daardoor veel meer meetelt dan bijvoorbeeld de gegeneraliseerde gammaverdeling – zijn de 90%-onzekerheidsbanden in Figuur 4 minder breed dan die verkregen in het kader van het project Integrale Verkenning inrichting Rijntakken (Kok et al., 1996, Bijlage B). In het laatstgenoemde onderzoek is slechts één kansverdeling bestudeerd: de gegeneraliseerde gammaverdeling. Daar de resultaten van het IVR-project ten grondslag liggen aan de huidige onzekerheidsverdeling in PC-Ring resulteren deze dan ook in bredere onzekerheidsbanden (Figuur 2) dan die op basis van Bayesgewichten (Figuur 4).

Kansverdeling	Aantal parameters	A priori Bayesgewichten	A posteriori Bayesgewichten
Exponentieel	2	0.1111	0.0000
Rayleigh	2	0.1111	0.2483
Normaal	2	0.1111	0.0821
Lognormaal	3	0.1111	0.1448
Gamma	3	0.1111	0.1552
Weibull	3	0.1111	0.2018
Gumbel	2	0.1111	0.0978
Gegeneraliseerde gamma	4	0.1111	0.0517
Gegeneraliseerde extreme waarden	3	0.1111	0.0181

Tabel 1: Kansverdelingen met aantal parameters en a priori en a posteriori Bayesgewichten voor de Rijn.



Figuur 4: Bayesiaanse schatting van de overschrijdingskans voor negen kansverdelingen en een gewogen gemiddelde hiervan voor de Rijn.

Tabel 2: Resultaten Bayesiaanse analyse voor de Rijn.

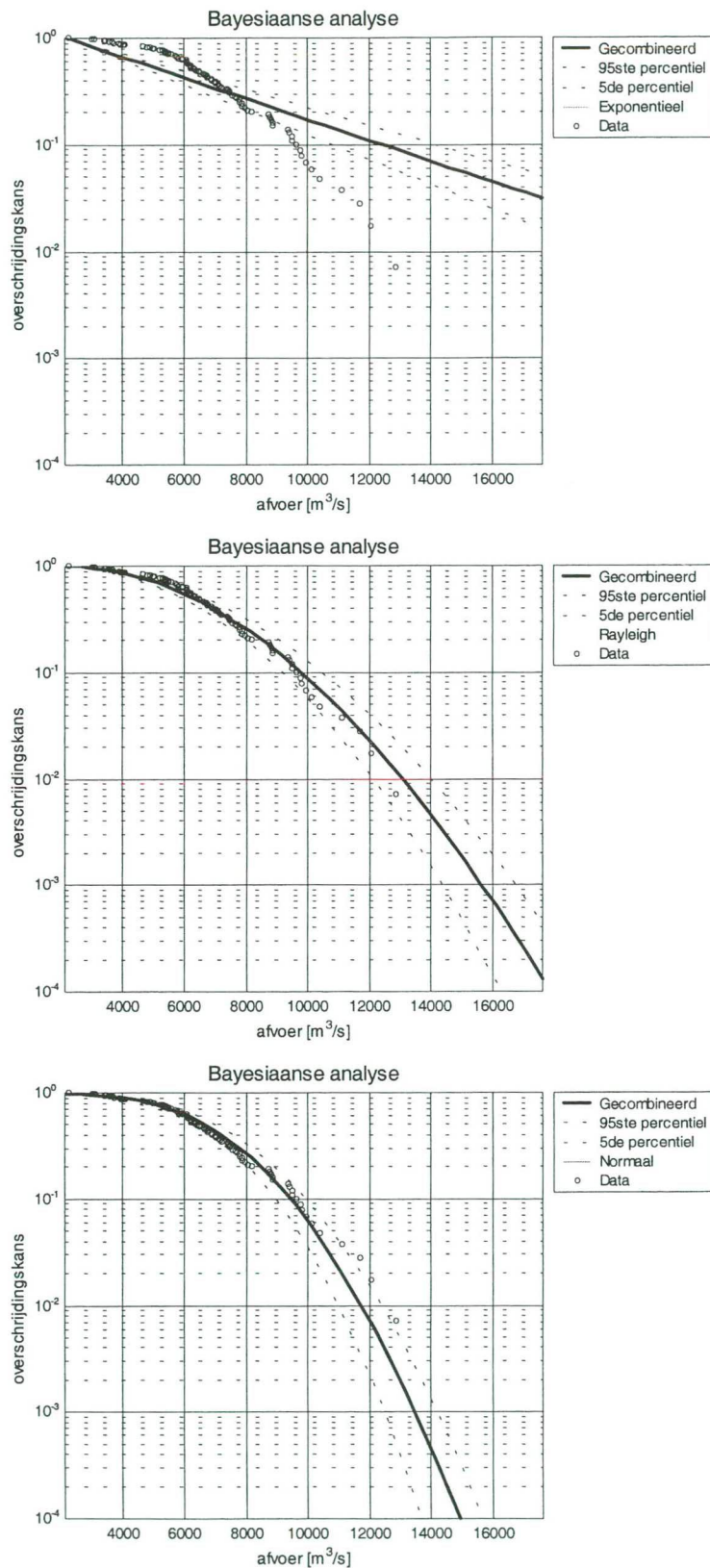
BAYESIAANSE UITKOMSTEN voor jaarmaxima															
Station	: Rijn														
Databestand	: waarnemingen\rijn.txt														
Aantal waarnemingen	: 98														
Rekenmethode	: Markov Chain Monte Carlo														
Kansverdeling:	Exp	Ray	Nor	Lgn	Gam	Wei	Gum	Gga	Gev						
Locatieparameter:	Stochastisch														
A Priori gewicht:	0.1111	0.1111	0.1111	0.1111	0.1111	0.1111	0.1111	0.1111	0.1111						
Terugkeertijd in jaren															
	1	2	5	10	20	25	50	100	200	500	1000	1250	2000	5000	10000
MAXIMUM LIKELIHOOD															

Exponentieel:	4281.8	6351.8	9735.8	12549.6	15468.3	16421.0	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Rayleigh:	5507.3	6946.7	8652.1	9780.7	10799.7	11110.1	12009.5	12840.2	13616.8	14567.2	15240.9	15450.3	15881.8	16688.0	17267.8
Normaal:	5913.3	7214.9	8582.3	9428.2	10172.3	10388.0	11025.0	11603.5	12133.2	12772.7	13225.0	13363.4	13653.2	14183.9	14565.1
Lognormaal:	5768.4	7036.0	8519.6	9531.6	10470.2	10760.1	11629.3	12454.6	13250.0	14263.0	15006.8	15242.8	15735.1	16679.2	17381.3
Gamma:	5757.6	7035.9	8533.0	9548.8	10484.3	10771.7	11629.8	12437.2	13209.4	14182.5	14888.7	15112.9	15575.7	16455.2	17104.2
Weibull:	5742.1	7099.2	8614.8	9584.9	10436.7	10693.9	11430.7	12106.2	12722.2	13471.8	13998.6	14163.1	14495.2	15115.4	15556.3
Gumbel:	5624.5	6920.2	8643.0	9942.5	11243.1	11661.8	12961.8	14262.0	15562.1	17280.7	---	---	---	---	---
Gegen. gamma:	5743.1	7086.7	8601.2	9580.1	10445.4	10706.9	11461.5	12154.9	12790.4	13570.3	14119.2	14286.5	14637.5	15282.3	15747.1
Gegen.extr.waarden:	5677.0	6781.2	8104.8	8999.3	9818.5	10069.4	10794.7	11459.4	12069.0	12789.2	13281.4	13430.3	13732.2	14266.5	14636.9
Gelijke gewichten:	5610.2	6974.9	8593.5	9718.3	10828.8	11196.3	12446.7	14043.3	16277.8	---	---	---	---	---	---
BAYESIAANSE ANALYSE															

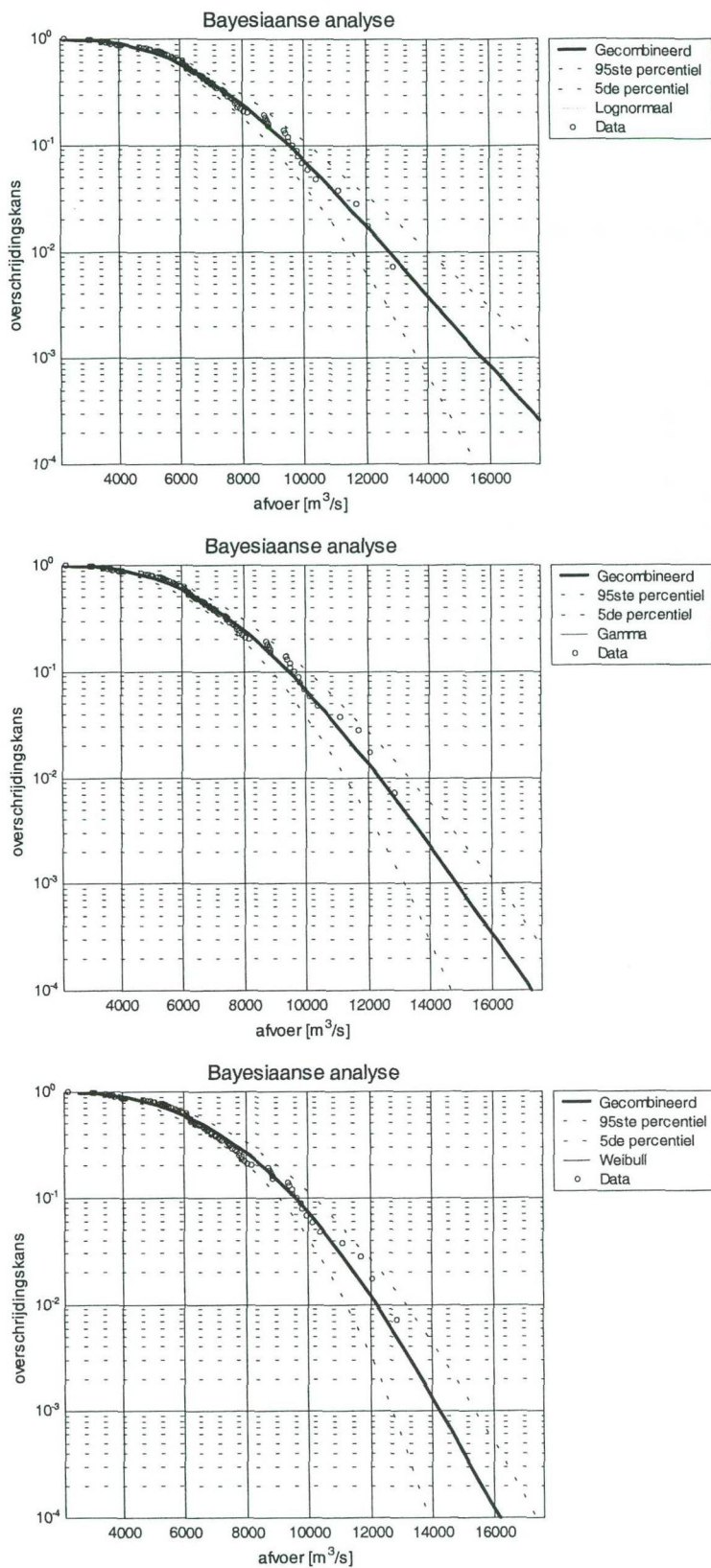
Exponentieel:	4242.0	6324.1	9749.4	12617.6	15612.5	16594.4	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Rayleigh:	5470.4	6945.3	8698.0	9867.2	10928.3	11250.4	12196.9	13075.0	13895.9	14914.0	15642.7	15868.2	16337.1	17217.2	---
Normaal:	5923.9	7233.2	8616.6	9475.9	10235.1	10460.3	11122.3	11721.8	12279.9	12966.7	13454.8	13609.4	13921.0	14510.7	14938.7
Lognormaal:	5720.7	7004.9	8528.3	9580.4	10570.0	10878.0	11816.3	12732.9	13639.4	14840.6	15762.3	16062.5	16703.3	---	---
Gamma:	5756.2	7035.8	8507.6	9499.2	10413.8	10697.0	11540.2	12345.3	13124.4	14122.5	14861.9	15098.5	15594.0	16554.9	17280.9
Weibull:	5773.9	7154.0	8665.2	9629.7	10476.6	10732.7	11479.5	12174.0	12825.4	13646.8	14243.4	14432.4	14827.5	15587.5	16156.9
Gumbel:	5621.4	6927.3	8669.4	9990.5	11317.4	11745.7	13079.3	14417.9	15761.7	17546.2	---	---	---	---	---
Gegen. gamma:	5795.6	7142.7	8619.4	9566.1	10411.0	10669.9	11425.5	12142.3	12828.0	13712.1	14370.7	14582.1	15026.5	15893.5	16551.9
Gegen.extr.waarden:	5794.4	7116.4	8641.0	9652.1	10557.7	10828.5	11630.4	12372.0	13091.1	14054.2	14828.3	15087.1	15659.9	16888.4	---
Bayesgewichten:	5691.9	7050.8	8622.1	9669.9	10637.9	10935.0	11838.9	12721.5	13601.1	14789.9	15727.9	16040.2	16719.3	---	---
5de percentiel:	6053.0	7464.7	9154.0	10317.1	11398.0	11734.3	12755.0	13751.8	14737.7	16070.5	17114.4	17463.2	---	---	---
95ste percentiel:	5343.4	6665.6	8139.6	9085.4	9931.0	10190.2	10947.8	11675.4	12386.7	13358.6	14132.3	14394.5	14960.4	16151.2	17136.9
Bayesgewichten:															

Kansverdeling:	Exp	Ray	Nor	Lgn	Gam	Wei	Gum	Gga	Gev						
Laplace-benadering:	0.0000	0.2483	0.0821	0.1448	0.1552	0.2018	0.0978	0.0517	0.0181						
Logaritme marginale dichtheid:															

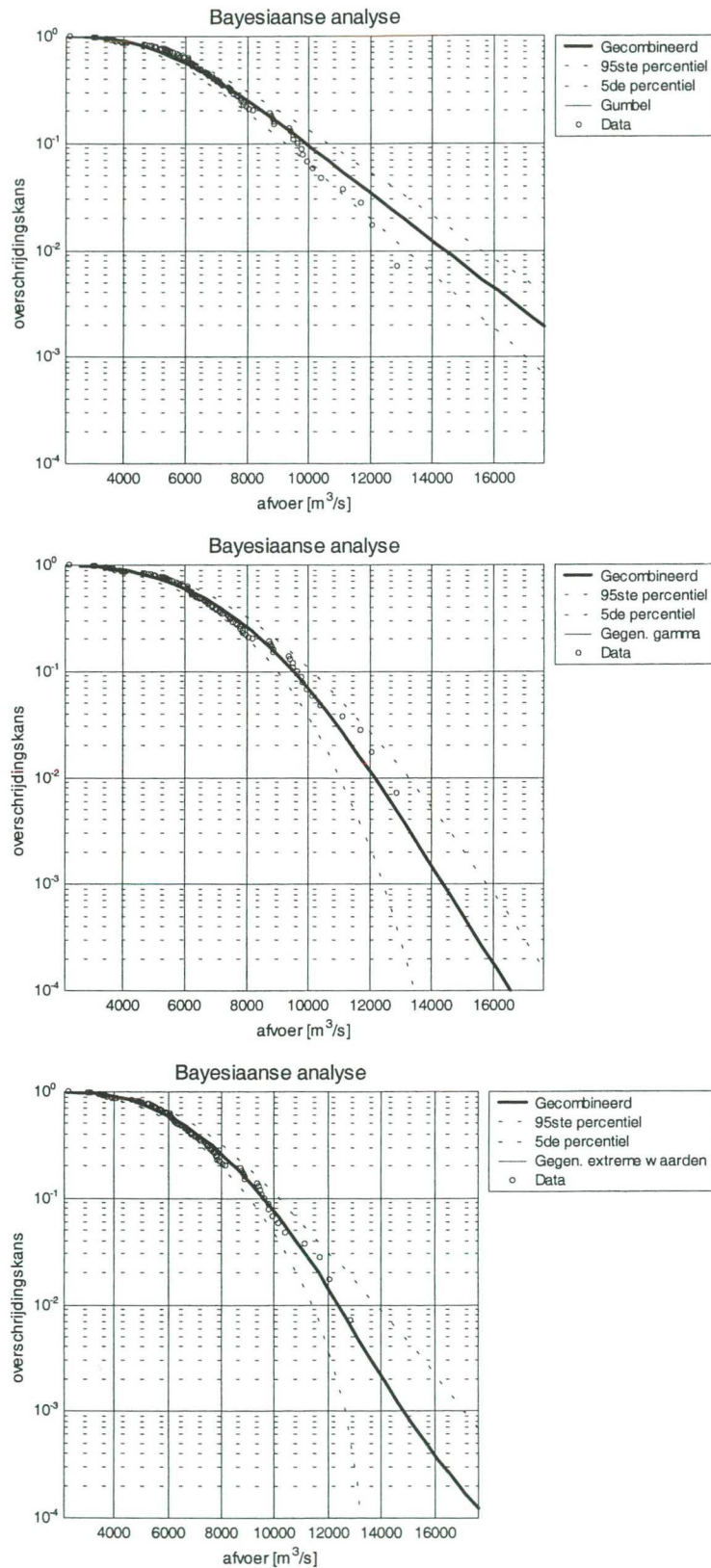
Kansverdeling:	Exp	Ray	Nor	Lgn	Gam	Wei	Gum	Gga	Gev						
Laplace-benadering:	-922.2	-891.8	-892.9	-892.3	-892.2	-892.0	-892.7	-893.3	-894.4						



Figuur 5: Bayesiaanse fits van de exponentiële, Rayleigh en normale verdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Rijn.



Figuur 6: Bayesiaanse fits van de lognormale, gamma- en Weibullverdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Rijn.



Figuur 7: Bayesiaanse fits van de Gumbel-, generaliseerde gamma- en gegeneraliseerde extreme-waardenverdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Rijn.

3.2 Werklijn met onzekerheidsverdeling

De waarden van A en B die horen bij de meest recente werklijn van de Bovenrijn bij Lobith bestaande uit drie delen zijn als volgt (Kalk, Lammers en Geerse, 2001):

$$\begin{aligned} A_1 &= 5893.30; & B_1 &= 1620.70; \\ A_2 &= 5964.63; & B_2 &= 1517.78; \\ A_3 &= 6612.61; & B_3 &= 1316.43. \end{aligned}$$

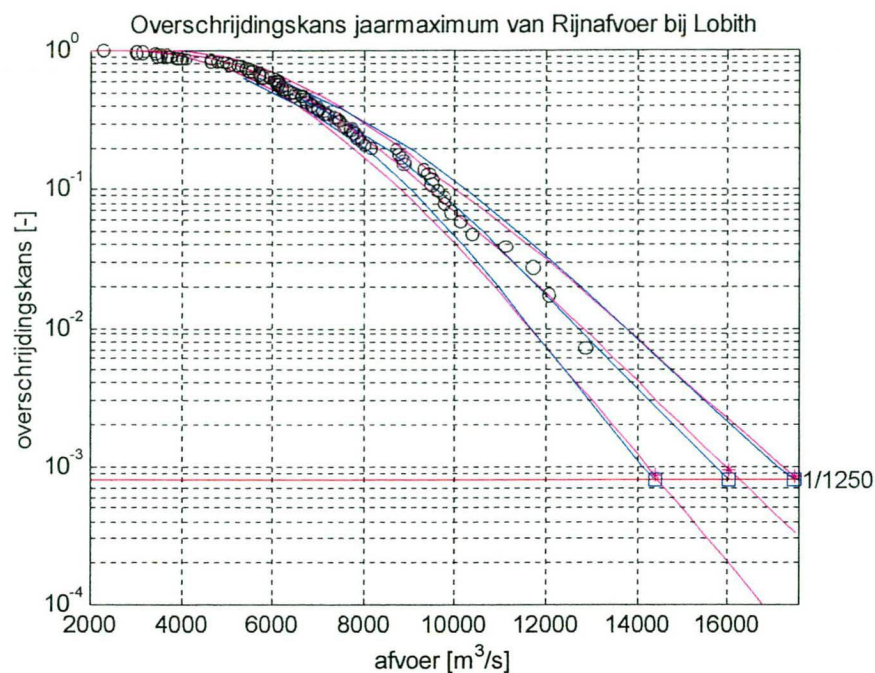
Vervolgens is de werklijn met statistische onzekerheden gefit op de resultaten van de Bayesiaanse analyse. De fit is zodanig bepaald dat het 5de en 95ste percentiel van de onzekerheidsverdelingen van de overschrijdingskansen volgens de werklijn zoveel mogelijk overeenkomen met die volgens de Bayesiaanse analyse (zie paragraaf 2.3). In wiskundige termen is het doel om de variatiecoëfficiënten van A_i , $i = 1, 2, 3$, en B_i , $i = 1, 2, 3$, te bepalen, waarbij de A 's volledig afhankelijk zijn, de B 's volledig afhankelijk zijn en de A 's onafhankelijk zijn van de B 's.

Er zijn in totaal twee kansverdelingen bepaald: één met de variatiecoëfficiënten variërend per lijnstuk van de werklijn en één met de variatiecoëfficiënten voor alle A 's aan elkaar gelijk en voor alle B 's aan elkaar gelijk. De resultaten zijn opgenomen in Tabel 3. De waarden van de geminimaliseerde doelfunctie van vergelijking (7) zijn respectievelijk 0.1420 en 0.1492.

Parameter	Variërende variatiecoëfficiënt	Deels variërende variatiecoëfficiënt
A_1	0.0415	0.0393
A_2	0.0413	0.0393
A_3	0.0383	0.0393
B_1	0.0772	0.0960
B_2	0.0833	0.0960
B_3	0.0967	0.0960

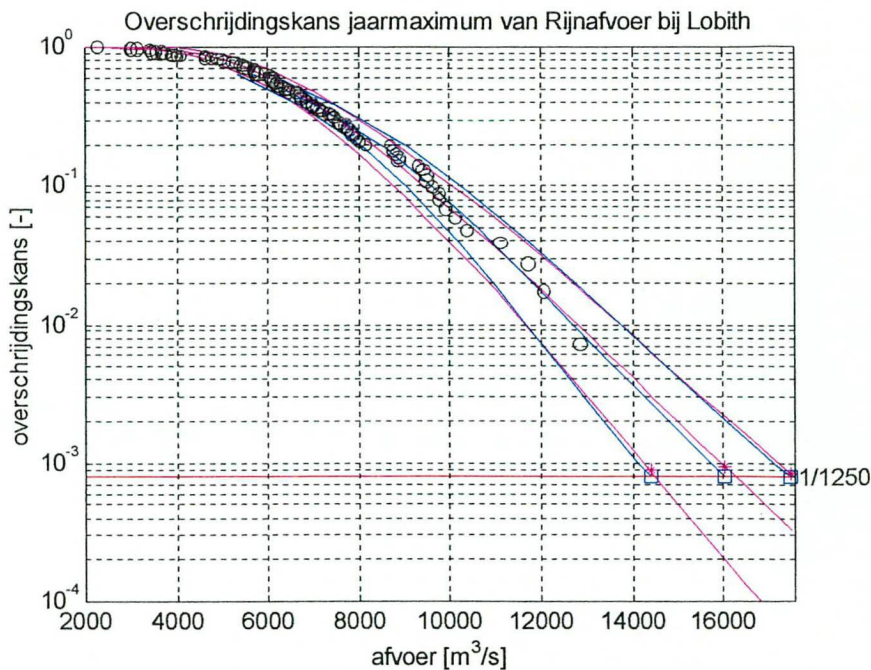
Tabel 3: Gefitte variatiecoëfficiënten van de werklijnparameters voor de Rijn.

In Figuur 8 zijn zowel de Bayesiaanse schatting van de overschrijdingskans en het bijhorende onzekerheidsinterval als de benaderde schatting van de overschrijdingskans en het bijhorende onzekerheidsinterval weergegeven. Het betreft hier de situatie waarbij de variatiecoëfficiënt per parameter varieert. Met andere woorden waarbij de variatiecoëfficiënten voor alle zes parameters van elkaar kunnen verschillen. De benadering is gefit op percentielen van overschrijdingskansen groter dan of gelijk aan 1/1250.



Figuur 8: Bayesiaanse schatting van overschrijdingskans en bijbehorend onzekerheidsinterval (vierkant) en benadering van overschrijdingskans en onzekerheidsinterval (asterisk) met variërende variatiecoëfficiënt voor de Rijn.

In Figuur 9 zijn zowel de Bayesiaanse schatting van de overschrijdingskans en het bijhorende onzekerheidsinterval als de benadering weergegeven voor de situatie waarbij de variatiecoëfficiënten voor de A 's aan elkaar gelijk zijn en voor de B 's aan elkaar gelijk zijn.

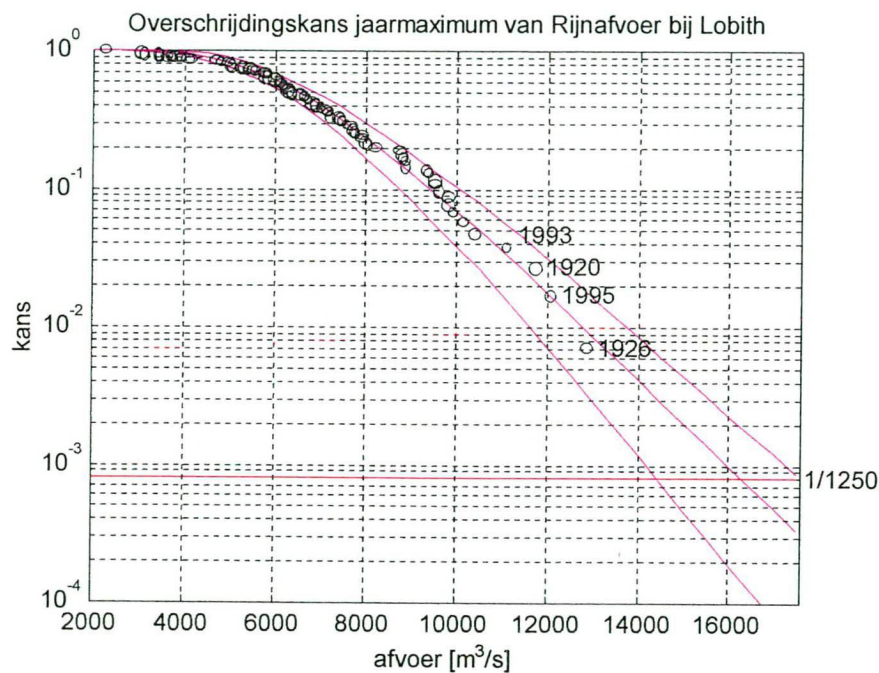


Figuur 9: Bayesiaanse schatting van overschrijdingskans en bijhorend onzekerheidsinterval (vierkant) en benadering van overschrijdingskans en bijhorend onzekerheidsinterval (asterisk) met deels variërende variatiecoëfficiënt voor de Rijn.

Het is opmerkelijk dat de kwaliteit van de fit nauwelijks of niet afhangt van of de zes variatiecoëfficiënten volledig of slechts deels van elkaar verschillen. De doelfunctie heeft voor de werklijn met de van elkaar verschillende variatiecoëfficiënten overigens wel de laagste waarde. Zij het dat het verschil marginaal is. Voor de eenvoud is het dan ook aan te bevelen om aan te nemen dat de variatiecoëfficiënt voor alle A 's gelijk is aan 0.0393 en voor alle B 's gelijk aan 0.0960. Voor deze variatiecoëfficiënten is de maatgevende afvoer rekening houdend met statistische onzekerheid 16287 m³/s, wat iets groter is dan de maatgevende afvoer zonder statistische onzekerheid (16000 m³/s).

3.3 Resultaat voor de Rijn

Voor de eenvoud is het aan te bevelen om aan te nemen dat de onzekerheidsverdeling van de werklijnparameters een meerdimensionale normale verdeling is, waarbij de A 's volledig afhankelijk zijn, de B 's volledig afhankelijk zijn en de A 's onafhankelijk zijn van de B 's. Voor de werklijn van de Bovenrijn bij Lobith is de variatiecoëfficiënt voor alle A 's gelijk aan 0.0393 en voor alle B 's gelijk aan 0.0960. De bijbehorende overschrijdingskans is met het 90%-onzekerheidsinterval weergegeven in Figuur 10. De maatgevende afvoer rekening houdend met statistische onzekerheid is 16287 m³/s, wat iets groter is dan de maatgevende afvoer zonder statistische onzekerheid (16000 m³/s).



Figuur 10: Voorgestelde benadering van overschrijdingskans en bijhorend 90%-onzekerheidsinterval voor de Rijn.

4 Onzekerheden in de werklijn voor de Maas

De werklijn voor de Maas bij Borgharen is een stuksgewijze exponentiële verdeling bestaande uit drie delen. Met deze werklijn kunnen terugkeertijden voor het optreden van extreme rivierafvoeren worden berekend. Het doel van dit hoofdstuk is om op basis van de Bayesiaanse analyse in paragraaf 4.1 de statistische onzekerheid in de werklijn voor de Maas bij Borgharen te kwantificeren. Om een eenvoudige implementatie in PC-Ring te garanderen is aangenomen dat de onzekerheidsverdeling van de werklijnparameters een meerdimensionale normale verdeling is. De parameters van deze normale verdeling zullen worden geschat in paragraaf 4.2. Een samenvatting van de resultaten voor de Maas is te vinden in paragraaf 4.3.

4.1 Bayesiaanse analyse

De onzekerheidsverdeling van werklijnparameters is gefit op de resultaten van een volledige Bayesiaanse analyse van jaarmaxima van Maasafvoeren bij Borgharen. Het betreft een meetreeks uit de periode 1911–1998 met jaarmaxima die voor de periode 1984 tot en met 1987 extra gehomogeniseerd zijn (Parmet et al., 2000b, Bijlage 2). In de Bayesiaanse analyse zijn de volgende negen kansverdelingen bestudeerd:

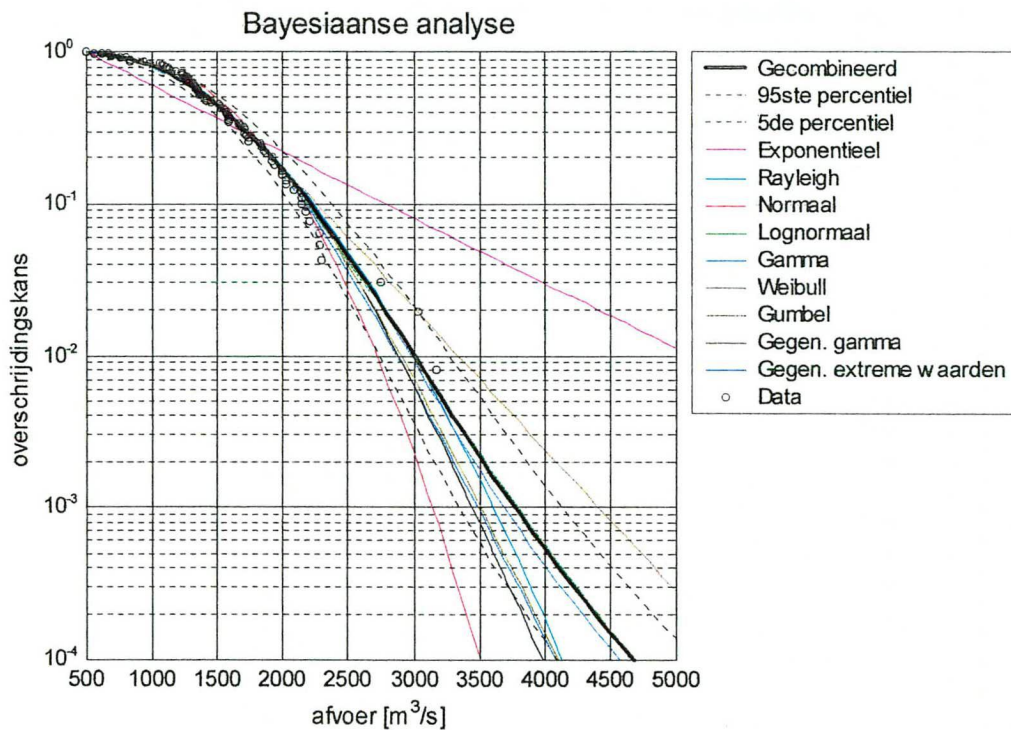
1. Exponentieel
2. Rayleigh
3. Normaal
4. Lognormaal
5. Gamma
6. Weibull
7. Gumbel
8. Gegeneraliseerde gamma
9. Gegeneraliseerde extreme waarden

De kansdichtheidsfuncties van deze verdelingen zijn weergegeven in Bijlage B. Voor deze kansverdelingen zijn gewichten berekend al naar gelang hoe goed een bepaalde kansverdeling past bij de waargenomen afvoeren (zie Tabel 4). Evenals voor de Rijn blijkt de Rayleighverdeling het beste bij de waarnemingen te passen. De Bayesiaanse schatting van de maatgevende afvoer is 3851 m³/s. De resultaten zijn te vinden in Figuur 11 en Tabel 5. In deze Bayesiaanse analyse zijn alle parameters van de kansverdelingen onzeker verondersteld.

In Figuur 11 zijn tevens de 90%-onzekerheidsbanden weergegeven voor de Bayesiaanse (gecombineerde) kansverdeling. Deze onzekerheidsbanden zijn bepaald met behulp van de onzekerheidsbanden van de negen afzonderlijke kansverdelingen in combinatie met de bijbehorende Bayesgewichten. Voor elke kansverdeling is de Bayesiaanse schatting van de overschrijdingskans met het bijbehorende 90%-onzekerheidsinterval weergegeven in Figuur 12 tot en met Figuur 14. Merk op dat deze onzekerheidsbanden breder worden (grotere onzekerheid hebben) naarmate het aantal parameters van een kansverdeling toeneemt.

Kansverdeling	Aantal parameters	A priori Bayesgewichten	A posteriori Bayesgewichten
Exponentieel	2	0.1111	0.0000
Rayleigh	2	0.1111	0.3765
Normaal	2	0.1111	0.0309
Lognormaal	3	0.1111	0.1327
Gamma	3	0.1111	0.1316
Weibull	3	0.1111	0.1298
Gumbel	2	0.1111	0.1438
Gegeneraliseerde gamma	4	0.1111	0.0361
Gegeneraliseerde extreme waarden	3	0.1111	0.0188

Tabel 4: Kansverdelingen met aantal parameters en a priori en a posteriori Bayesgewichten voor de Maas.



Figuur 11: Bayesiaanse schatting van de overschrijdingskans voor negen kansverdelingen en een gewogen gemiddelde hiervan voor de Maas.

BAYESIAANSE UITKOMSTEN voor jaarmaxima
 Station : Maas
 Databestand : waarnemingen\maas.txt
 Aantal waarnemingen : 88
 Rekenmethode : Markov Chain Monte Carlo

Kansverdeling: Exp Ray Nor Lgn Gam Wei Gum Gga Gev
 Locatieparameter: Stochastisch
 A Priori gewicht: 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111

	Terugkeertijd in jaren															
	1	2	5	10	20	25	50	100	200	500	1000	1250	2000	5000	10000	
MAXIMUM LIKELIHOOD																

Exponentieel:	955.3	1420.8	2181.6	2814.3	3470.6	3684.8	4355.5	---	---	---	---	---	---	---	---	
Rayleigh:	1231.7	1567.0	1963.1	2226.7	2463.9	2535.5	2745.3	2938.9	3119.3	3340.6	3497.9	3546.4	3646.9	3834.4	3969.6	
Normaal:	1311.7	1624.9	1955.3	2161.4	2340.7	2394.6	2547.7	2687.7	2815.8	2971.4	3080.9	3114.8	3184.2	3313.0	3405.5	
Lognormaal:	1271.6	1574.2	1934.9	2184.4	2417.9	2490.5	2708.6	2918.0	3120.8	3381.0	3573.3	3634.5	3762.6	4009.4	4194.0	
Gamma:	1269.2	1575.7	1939.5	2189.0	2420.1	2491.4	2704.1	2905.9	3099.0	3343.1	3521.2	3577.4	3694.4	3917.0	4081.3	
Weibull:	1257.8	1585.7	1960.7	2206.3	2423.7	2489.2	2679.2	2853.2	3014.5	3211.2	3349.4	3392.8	3480.9	3644.6	3762.4	
Gumbel:	1241.4	1551.8	1961.4	2271.1	2580.8	2680.4	2990.0	3299.5	3609.1	4018.3	4327.8	4427.5	4637.3	---	---	
Gegen. gamma:	1261.9	1581.5	1953.1	2200.9	2423.5	2491.2	2689.3	2872.5	3043.8	3255.1	3405.8	3452.4	3549.0	3729.6	3860.2	
Gegen.extr.waarden:	1251.0	1520.5	1839.9	2057.4	2256.2	2316.7	2493.3	2653.8	2801.8	2976.5	3096.4	3131.8	3205.4	3334.4	3423.0	
Gelijke gewichten:	1236.2	1562.9	1951.9	2224.3	2491.2	2578.9	2870.3	3223.4	3694.7	4492.0	---	---	---	---	---	

BAYESIAANSE ANALYSE

Exponentieel:	945.5	1413.5	2183.7	2829.0	3503.0	3724.1	4419.5	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Rayleigh:	1224.8	1568.3	1976.7	2250.0	2498.7	2573.6	2795.6	3001.8	3195.3	3435.2	3607.4	3661.1	3772.3	3981.6	4134.0	---
Normaal:	1312.7	1628.3	1962.3	2172.3	2356.2	2411.6	2571.1	2717.8	2853.6	3021.1	3139.9	3177.2	3253.6	3397.5	3501.8	---
Lognormaal:	1256.5	1565.0	1936.5	2197.0	2444.7	2522.7	2761.1	2996.8	3232.7	3549.5	3795.9	3877.1	4051.0	4403.9	4685.4	---
Gamma:	1273.0	1582.9	1940.1	2181.4	2404.1	2472.2	2677.2	2873.0	3062.2	3305.6	3486.6	3544.5	3666.3	3903.6	4083.9	---
Weibull:	1264.8	1599.4	1975.6	2220.6	2439.7	2506.5	2701.9	2884.9	3059.3	3281.4	3445.6	3498.1	3608.3	3823.3	3987.0	---
Gumbel:	1240.2	1552.9	1967.3	2282.3	2598.5	2700.6	3018.5	3337.7	3658.3	4084.3	4408.2	4512.8	4733.5	---	---	---
Gegen. gamma:	1269.0	1590.4	1960.9	2209.0	2434.7	2504.1	2709.7	2904.8	3092.6	3333.8	3513.4	3570.9	3691.8	3927.4	4106.3	---
Gegen.extr.waarden:	1270.5	1585.7	1964.3	2225.4	2467.0	2541.1	2762.7	2974.6	3182.8	3464.4	3690.2	3766.5	3932.9	4284.5	4578.9	---
Bayesgewichten:	1247.8	1574.9	1963.4	2228.7	2475.4	2551.7	2782.7	3007.5	3230.9	3532.3	3771.1	3851.0	4024.6	4387.6	4683.2	---
5de percentiel:	1336.0	1681.7	2103.9	2397.4	2675.2	2761.7	3024.2	3278.0	3530.5	3868.6	4135.9	4225.4	4420.1	4826.5	---	---
95ste percentiel:	1163.4	1477.6	1837.1	2074.0	2288.8	2353.8	2548.8	2734.8	2915.4	3158.2	3349.6	3413.1	3554.6	3855.7	4103.1	---

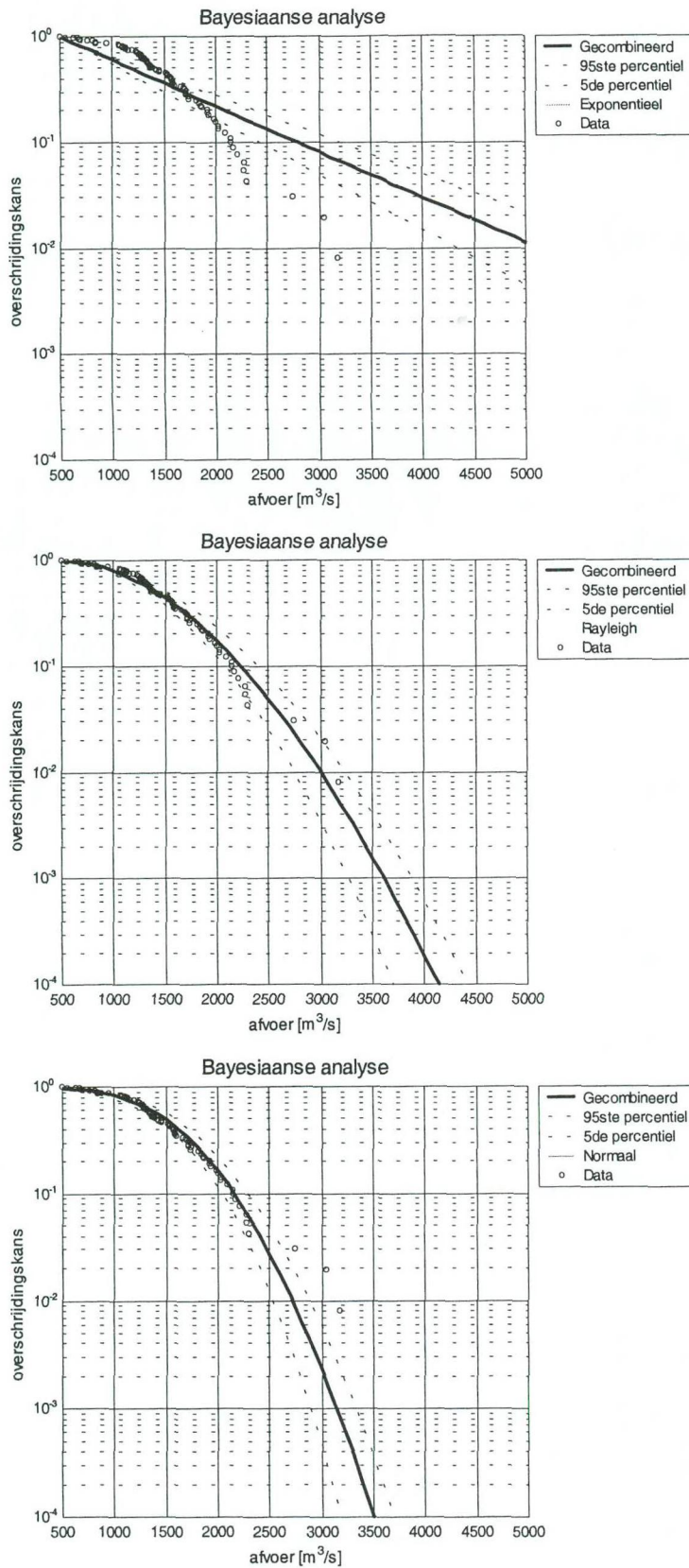
Bayesgewichten:

 Kansverdeling: Exp Ray Nor Lgn Gam Wei Gum Gga Gev
 Laplace-benadering: 0.0000 0.3765 0.0309 0.1327 0.1316 0.1298 0.1438 0.0361 0.0188

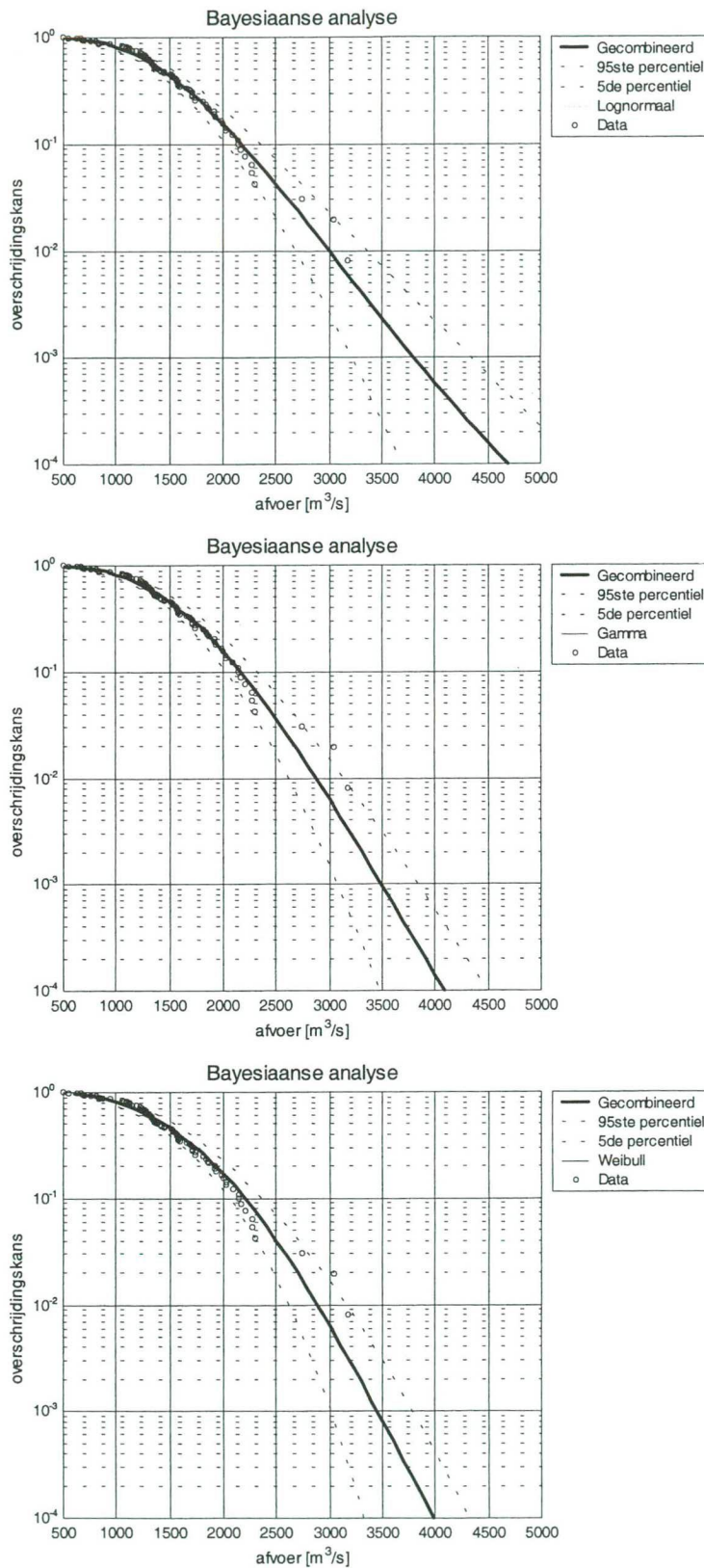
Logaritme marginale dichtheid:

 Kansverdeling: Exp Ray Nor Lgn Gam Wei Gum Gga Gev
 Laplace-benadering: -696.9 -674.7 -677.2 -675.7 -675.7 -675.7 -675.6 -677.0 -677.7

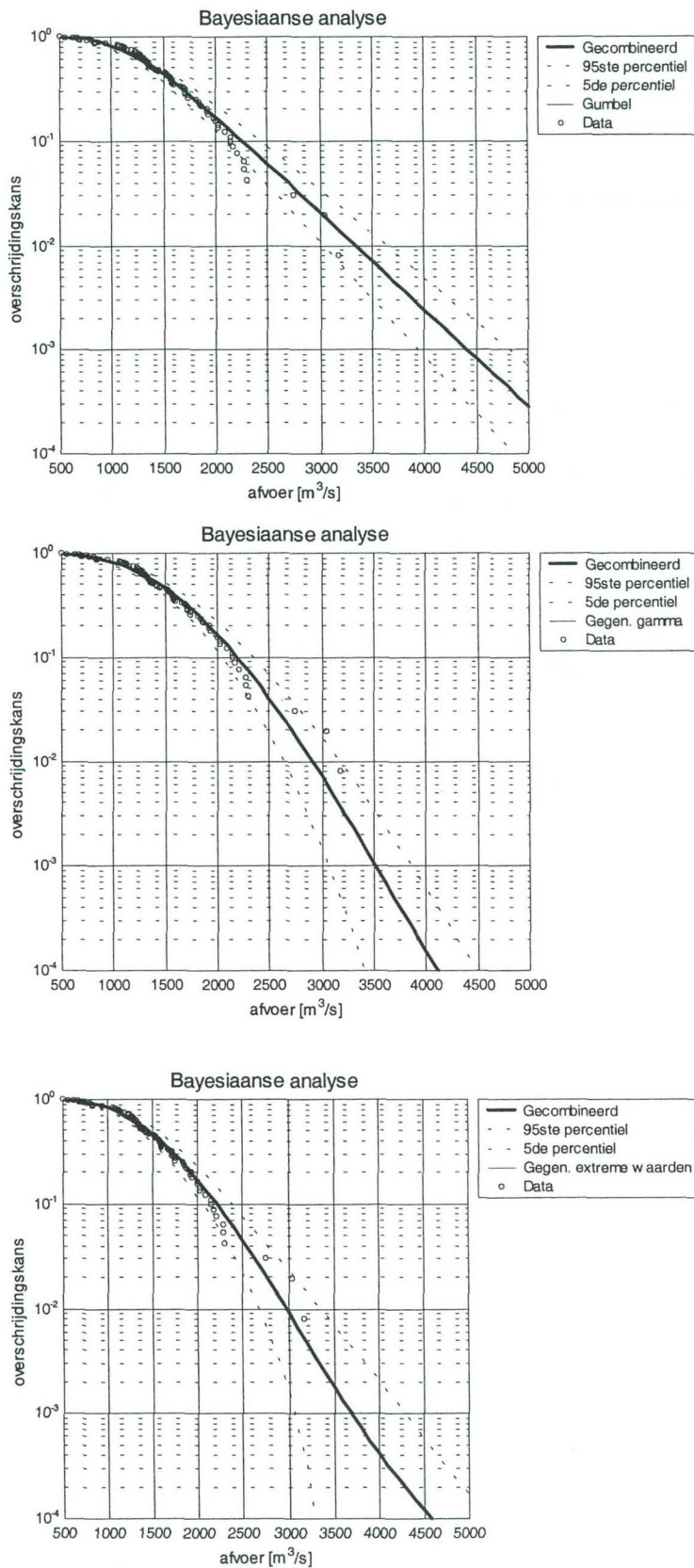
Tabel 5: Resultaten Bayesiaanse analyse voor de Maas.



Figuur 12: Bayesiaanse fits van de exponentiële, Rayleigh en normale verdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Maas.



Figuur 13: Bayesiaanse fits van de lognormale, gamma- en Weibullverdeling inclusief het 90%-onzekerheidsinterval voor de Maas.



Figuur 14: Bayesiaanse fits van de Gumbel-, generaliseerde gamma- en gegeneraliseerde extreme-waardenverdeling inclusief 90%-onzekerheidsinterval voor de Maas.

4.2 Werklijn met onzekerheidsverdeling

De waarden van A en B die horen bij de meest recente werklijn van de Maas bij Borgharen bestaande uit drie delen zijn als volgt (Kalk, Lammers en Geerse, 2001):

$$\begin{aligned} A_1 &= 1264.2; & B_1 &= 450.3; \\ A_2 &= 1331.4; & B_2 &= 353.4; \\ A_3 &= 1488.7; & B_3 &= 324.8. \end{aligned}$$

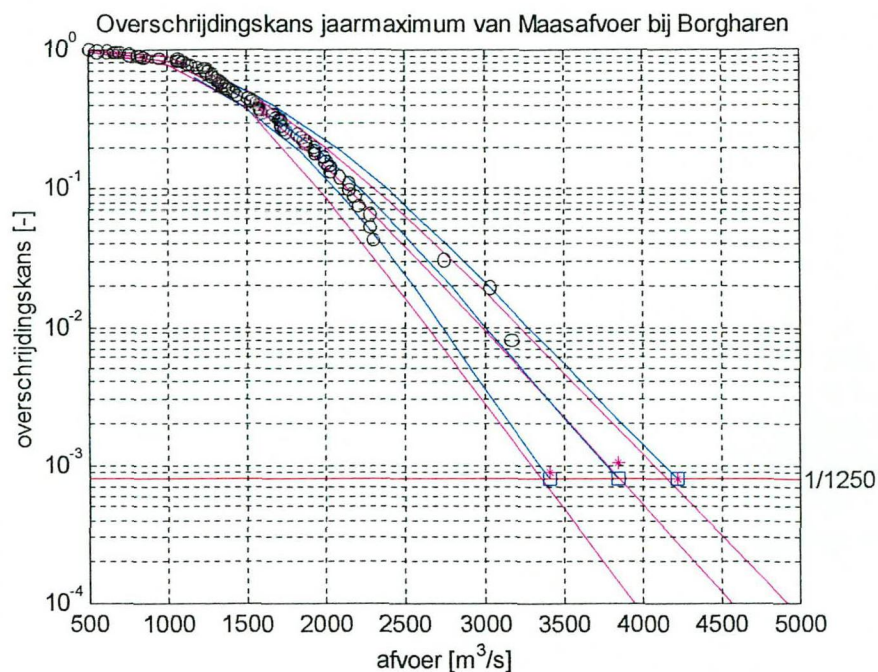
Vervolgens is de werklijn met statistische onzekerheden gefit op de resultaten van de Bayesiaanse analyse. De fit is zodanig bepaald dat het 5de en 95ste percentiel van de onzekerheidsverdelingen van de overschrijdingskansen volgens de werklijn zoveel mogelijk overeenkomen met die volgens de Bayesiaanse analyse (zie paragraaf 2.3). In wiskundige termen is het doel om de variatiecoëfficiënten van A_i , $i = 1, 2, 3$, en B_i , $i = 1, 2, 3$, te bepalen, waarbij de A 's volledig afhankelijk zijn, de B 's volledig afhankelijk zijn en de A 's onafhankelijk zijn van de B 's.

Er zijn in totaal twee kansverdelingen bepaald: één met de variatiecoëfficiënten variërend per lijnstuk van de werklijn en één met de variatiecoëfficiënten voor alle A 's aan elkaar gelijk en voor alle B 's aan elkaar gelijk. De resultaten zijn opgenomen in Tabel 6. De waarden van de geminimaliseerde doelfunctie van vergelijking (7) zijn respectievelijk 0.1287 en 0.1898.

Parameter	Variërende variatiecoëfficiënt	Deels variërende variatiecoëfficiënt
A_1	0.0331	0.0349
A_2	0.0359	0.0349
A_3	0.0377	0.0349
B_1	0.1246	0.1175
B_2	0.1203	0.1175
B_3	0.0871	0.1175

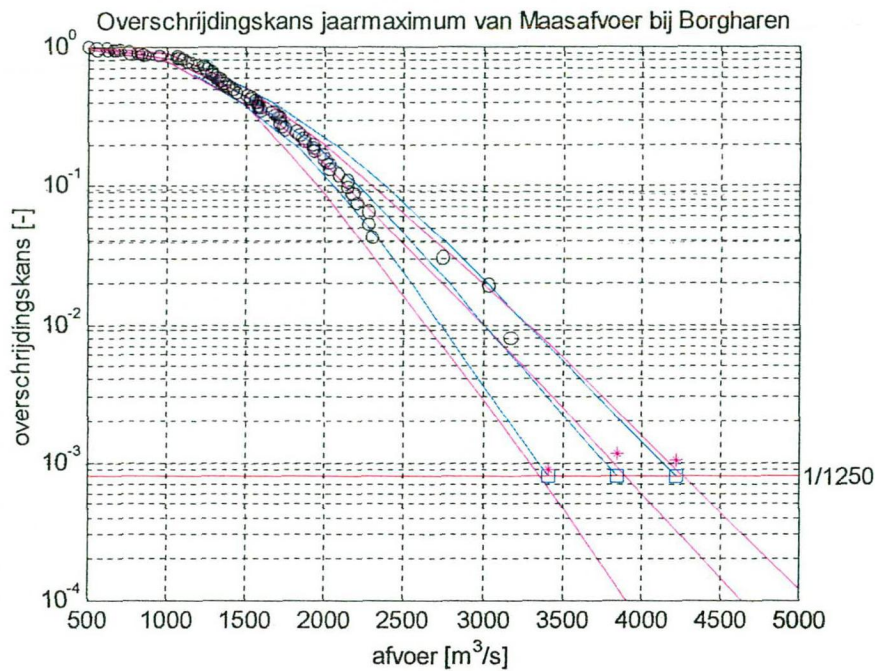
Tabel 6: Gefitte variatiecoëfficiënten van de werklijnparameters voor de Maas.

In Figuur 15 zijn zowel de Bayesiaanse schatting van de overschrijdingskans en het bijhorende onzekerheidsinterval als de benaderde schatting van de overschrijdingskans en het bijhorende onzekerheidsinterval weergegeven. Het betreft hier de situatie waarbij de variatiecoëfficiënt per parameter varieert. Met andere woorden waarbij de variatiecoëfficiënten voor alle zes parameters van elkaar kunnen verschillen. De benadering is gefit op percentielen van overschrijdingskansen groter dan of gelijk aan 1/1250.



Figuur 15: Bayesiaanse schatting van overschrijdingskans en bijbehorend onzekerheidsinterval (vierkant) en benadering van overschrijdingskans en onzekerheidsinterval (asterisk) met variërende variatiecoëfficiënt voor de Maas.

In Figuur 16 zijn zowel de Bayesiaanse schatting van de overschrijdingskans en het bijhorende onzekerheidsinterval als de benadering weergegeven voor de situatie waarbij de variatiecoëfficiënten voor de A 's aan elkaar gelijk zijn en voor de B 's aan elkaar gelijk zijn. Helaas is de kwaliteit van de fit voor de Maas – in vergelijking met die voor de Rijn – iets minder goed. Dit is echter inherent aan de aanname van normaalverdeelde werklijnparameters. Het zou dan ook beter zijn om de resultaten van de Bayesiaanse analyse zonder deze te benaderen op te nemen in PC-Ring.

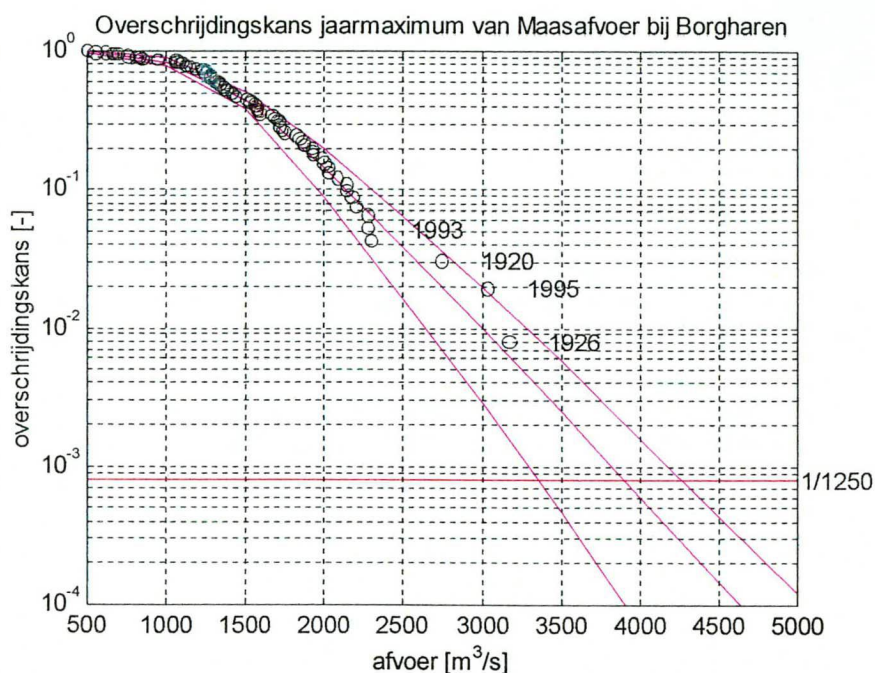


Figuur 16: Bayesiaanse schatting van overschrijdingskans en bijhorend onzekerheidsinterval (vierkant) en benadering van overschrijdingskans en bijhorend onzekerheidsinterval (asterisk) met deels variërende variatiecoëfficiënt voor de Maas.

Het is opmerkelijk dat de kwaliteit van de fit nauwelijks of niet afhangt van of de zes variatiecoëfficiënten volledig of slechts deels van elkaar verschillen. Voor de eenvoud is het dan ook aan te bevelen om aan te nemen dat de variatiecoëfficiënt voor alle A 's gelijk is aan 0.0349 en voor alle B 's gelijk aan 0.1175. Voor deze variatiecoëfficiënten is de maatgevende afvoer rekening houdend met statistische onzekerheid 3945 m^3/s , wat iets groter is dan de maatgevende afvoer zonder statistische onzekerheid (3805 m^3/s).

4.3 Resultaat voor de Maas

Voor de eenvoud is het aan te bevelen om aan te nemen dat de onzekerheidsverdeling van de werklijnparameters een meerdimensionale normale verdeling is, waarbij de A 's volledig afhankelijk zijn, de B 's volledig afhankelijk zijn en de A 's onafhankelijk zijn van de B 's. Voor de werklijn van de Maas bij Borgharen is de variatiecoëfficiënt voor alle A 's gelijk aan 0.0349 en voor alle B 's gelijk aan 0.1175. De bijbehorende overschrijdingskans is met het 90%-onzekerheidsinterval weergegeven in Figuur 17. De maatgevende afvoer rekening houdend met statistische onzekerheid is 3945 m³/s, wat iets groter is dan de maatgevende afvoer zonder statistische onzekerheid (3805 m³/s).



Figuur 17: Voorgestelde benadering van overschrijdingskans en bijhorend 90%-onzekerheidsinterval voor de Maas.

5 Conclusies en aanbevelingen

Voor het berekenen van overstromingskansen is de rivierafvoer een belangrijke belastingsvariabele. De natuurlijke fluctuatie van de afvoer in de tijd is in PC-Ring gemodelleerd door middel van een frequentieverdeling, de zogenoemde werklijn. Voor zowel de Bovenrijn bij Lobith als de Maas bij Borgharen bestaat deze werklijn uit drie stukken. Indien de frequentie op logaritmische schaal wordt weergegeven, dan zijn de drie delen van de werklijn alle een rechte lijn. Elk deel wordt gerepresenteerd door twee parameters, een A en een B , die de relatie beschrijven tussen de rivierafvoer q en de gemiddelde terugkeertijd t : dat wil zeggen $q = A + B \ln(t)$. Bij het bepalen van deze werklijn speelt statistische onzekerheid echter een grote rol. Dit rapport stelt een methode voor om de statistische onzekerheid in de werklijnparameters te modelleren.

Voor het schatten van kansverdelingen, waarmee zowel inherente als statistische onzekerheid kunnen worden gemodelleerd, is de Bayesiaanse statistiek geschikt. Ten behoeve van een eenvoudige implementatie in PC-Ring is het verder aan te bevelen te veronderstellen dat de onzekerheidsverdeling van de werklijnparameters een meerdimensionale normale verdeling is, waarbij de A 's volledig afhankelijk zijn, de B 's volledig afhankelijk zijn en de A 's onafhankelijk zijn van de B 's. Ter bevordering van een eenvoudige implementatie is er voor het gemak aangenomen, dat de verwachte waarden van de werklijnparameters gelijk zijn aan hun oorspronkelijke deterministische waarden, terwijl hun variatiecoëfficiënt (quotiënt van de standaarddeviatie en de verwachting) bij benadering is gefit op de resultaten van een Bayesiaanse analyse.

Deze Bayesiaanse analyse geeft de volgende resultaten:

- Voor de werklijn van de Bovenrijn bij Lobith is de variatiecoëfficiënt voor alle A 's gelijk aan 0.0393 en voor alle B 's gelijk aan 0.0960. De maatgevende afvoer rekening houdend met statistische onzekerheid is 16287 m³/s; iets groter dan de maatgevende afvoer zonder statistische onzekerheid ter grootte van 16000 m³/s.
- Voor de werklijn van de Maas bij Borgharen is de variatiecoëfficiënt voor alle A 's gelijk aan 0.0349 en voor alle B 's gelijk aan 0.1175. De maatgevende afvoer rekening houdend met statistische onzekerheid is 3945 m³/s; iets groter dan de maatgevende afvoer zonder statistische onzekerheid ter grootte van 3805 m³/s.

Wat opvalt aan deze resultaten is dat de variatiecoëfficiënten van de werklijnparameters voor de Rijn en de Maas vrijwel met elkaar overeenkomen. Omdat er slechts voor twee rivieren een statistische analyse is uitgevoerd, kunnen hier echter nog geen conclusies aan worden verbonden.

De kwaliteit van de fit van de werklijn met onzekerheden op die van de Bayesiaanse analyse is helaas voor de Maas – in vergelijking met die voor de Rijn – iets minder goed. Dit is echter inherent aan de aanname van normaalverdeelde werklijnparameters. Het zou dan ook beter zijn om in de toekomst de resultaten van de Bayesiaanse analyse direct op te nemen in PC-Ring zonder deze te benaderen. Hoe dit het beste kan worden gedaan, moet nog nader worden onderzocht.

6 Referenties

- Box, G.E.P., G.C. Tiao (1973). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. New York: John Wiley and Sons.
- Chbab, E.H., J.M. van Noortwijk (2002). Bayesiaanse statistiek voor de analyse van extreme waarden. Ministerie van Verkeer en Waterstaat, Directoraat-Generaal Rijkswaterstaat, Rijksinstituut voor Integraal Zoetwaterbeheer en Afvalwaterbehandeling, RIZA-rapport 2002.006.
- Chbab, E.H., J.M. van Noortwijk, M.T. Duits (2000). Bayesian frequency analysis of extreme river discharges. In Frank Toensmann and Manfred Koch, editors, *River Flood Defence, Proceedings of the International Symposium on Flood Defence, Kassel, Germany, 2000*, pages F51-F60. Kassel: Herkules Verlag Kassel.
- Frijters, M., K. Slijkhuis (1998). Onzekerheidsanalyse Inundatiekans: Eindrapport. Ministerie van Verkeer en Waterstaat, Directoraat-Generaal Rijkswaterstaat, Bouwdienst Rijkswaterstaat, Technisch Rapport ONIN-1-98016.
- Jeffreys, H.J. (1961). *Theory of Probability; Third Edition*. Oxford: Clarendon Press.
- Kalk, H.J., I.B.M. Lammers, C.P.M. Geerse (2001). Uitbreiding afvoerstatistiek Borgharen, Lith, Lobith en Olst. HKV LIJN IN WATER en Rijkswaterstaat RIZA.
- Kok, M., N. Douben, J.M. van Noortwijk, and W. Silva (1996). Integrale Verkenning inrichting Rijntakken (IVR); Rapportnummer 12: Veiligheid. Ministerie van Verkeer en Waterstaat, Directoraat-Generaal Rijkswaterstaat, Rijksinstituut voor Integraal Zoetwaterbeheer en Afvalwaterbehandeling.
- Kass, R.E., A.E. Raftery (1995). Bayes factors. *Journal of the American Statistical Association*, 90(430): 773-795.
- Mood, A.M., F.A. Graybill, D.C. Boes (1974). *Introduction to the Theory of Statistics; Third Edition*. Tokyo: McGraw-Hill, Inc.
- van Noortwijk, J.M., H.J. Kalk, M.T. Duits, E.H. Chbab (2001). The use of Bayes factors for model selection in structural reliability. *The 8th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR), Newport Beach, California, U.S.A., June 17-21, 2001*.
- van Noortwijk, J.M., H.J. Kalk, M.T. Duits, E.H. Chbab (2002). Bayesian Statistics for Flood Prevention. HKV LIJN IN WATER en Rijkswaterstaat RIZA.
- Parmet, B., H. van de Langemheen, H. Chbab, J. Kwadijk, F. Diermanse, D. Klopstra (2000a). Analyse van de maatgevende afvoer van de Rijn te Lobith, Rijkswaterstaat RIZA.
- Parmet, B., H. van de Langemheen, H. Chbab, J. Kwadijk, N. Lorenz, D. Klopstra (2000b). Analyse van de maatgevende afvoer van de Maas te Borgharen, Rijkswaterstaat RIZA.
- Slijkhuis, K. (1998). Onzekerheidsanalyse Inundatiekans: Beschrijvingenbundel; Mechanismebesrijvingen. Directoraat-Generaal Rijkswaterstaat, Ministerie van Verkeer en Waterstaat, Bouwdienst Rijkswaterstaat, Technisch Rapport ONIN-1-98017.
- Vrouwenvelder, A.C.W.M., H.M.G.M. Steenbergen, K.A.H. Slijkhuis (2001). Theoriehandleiding PC-Ring, Versie 2.0, Deel B: Statistische modellen, TNO-Rapport 98-CON-R1431.

Bijlagen

Bijlage A: Frequentie en kans

In deze bijlage zal nader worden ingegaan op het verschil tussen frequentie en kans van optreden van een bepaalde overschrijdingsgebeurtenis. Een overschrijdingsgebeurtenis is hierbij gedefinieerd als de periode tussen het moment dat de afvoer een gegeven waarde overschrijdt en het moment dat de afvoer deze waarde weer onderschrijdt. Het gaat in deze bijlage met name om de veronderstellingen, die ten grondslag liggen aan de in dit rapport gebruikte relatie tussen frequentie en kans. Ook zullen de meest relevante formules worden gepresenteerd. Voor het gemak zullen we in het vervolg 'overschrijdingsgebeurtenis' kortweg aanduiden met gebeurtenis.

Met betrekking tot het optreden van een gebeurtenis in een bepaalde periode wordt verondersteld, dat de kans op zo'n gebeurtenis niet afhangt van hoe lang geleden deze voor het laatst is opgetreden. Voorbeeld: de kans dat het tijdstip van optreden van een gebeurtenis groter is dan (zeg) 5 jaar hangt niet af van of het nu 0 of 5 jaar geleden is dat de vorige gebeurtenis heeft plaatsgevonden. Met betrekking tot het optreden van een gebeurtenis in de toekomst zijn verleden en heden (bij een onveranderde gemiddelde terugkeertijd) dus niet van belang. Verder is het aantal gebeurtenissen dat optreedt in de ene tijdsperiode statistisch onafhankelijk van het aantal gebeurtenissen dat optreedt in een andere tijdsperiode (waarbij de twee tijdsperiodes elkaar niet overlappen). Uitgaande van bovenstaande aannamen kan worden afgeleid dat de tijdsperiode tussen het optreden van twee gebeurtenissen (terugkeertijd) een exponentiële verdeling heeft. Stel dat de gemiddelde terugkeertijd gelijk is aan t jaar, dan is de cumulatieve kansverdeling van de terugkeertijd T wiskundig te schrijven als

$$\Pr\{T \leq \tau\} = 1 - \exp\left\{-\frac{\tau}{t}\right\} \quad (\text{A.1})$$

voor $\tau > 0$. Deze exponentiële verdeling representeert de onzekerheid in de terugkeertijd tussen twee gebeurtenissen. Het proces van het optreden van gebeurtenissen met een exponentieel-verdeelde terugkeertijd wordt in de literatuur aangeduid met een Poisson-proces [zie b.v. Mood, Graybill en Boes (1974, Hoofdstuk 3)].

De kans in (A.1) is de kans dat er in τ jaar tenminste 1 gebeurtenis optreedt. Met andere woorden: dat er in τ jaar 1, 2, 3 of meer gebeurtenissen optreden. Deze kans kan als volgt worden uitgeschreven als functie van de kans op precies 1 gebeurtenis in τ jaar, de kans op precies 2 gebeurtenissen in τ jaar, enzovoort:

$$\begin{aligned} \Pr\{T \leq \tau\} &= 1 - \exp\left\{-\frac{\tau}{t}\right\} = 1 - \Pr\{\text{aantal gebeurtenissen in } \tau \text{ jaar} = 0\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{\text{aantal gebeurtenissen in } \tau \text{ jaar} = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\tau}{t}\right]^k \exp\left\{-\frac{\tau}{t}\right\}. \end{aligned}$$

De naam Poisson-proces is ontleend aan de discrete kansverdeling van de stochastische variabele 'aantal gebeurtenissen in τ jaar'; deze variabele heeft een Poisson-verdeling. Gegeven dat de gemiddelde terugkeertijd gelijk is aan t jaar is verder het verwachte aantal gebeurtenissen in τ jaar eenvoudigweg gelijk aan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{\text{aantal gebeurtenissen in } \tau \text{ jaar} = k\} = \frac{\tau}{t}. \quad (\text{A.2})$$

In dit rapport zijn we voornamelijk geïnteresseerd in de kans op een gebeurtenis per jaar. Gegeven dat de gemiddelde terugkeertijd gelijk is aan t jaar is op basis van formule (A.1) de kans op een gebeurtenis per jaar gelijk aan:

$$\text{overschrijdingskans} = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{t}\right\}, \quad (\text{A.3})$$

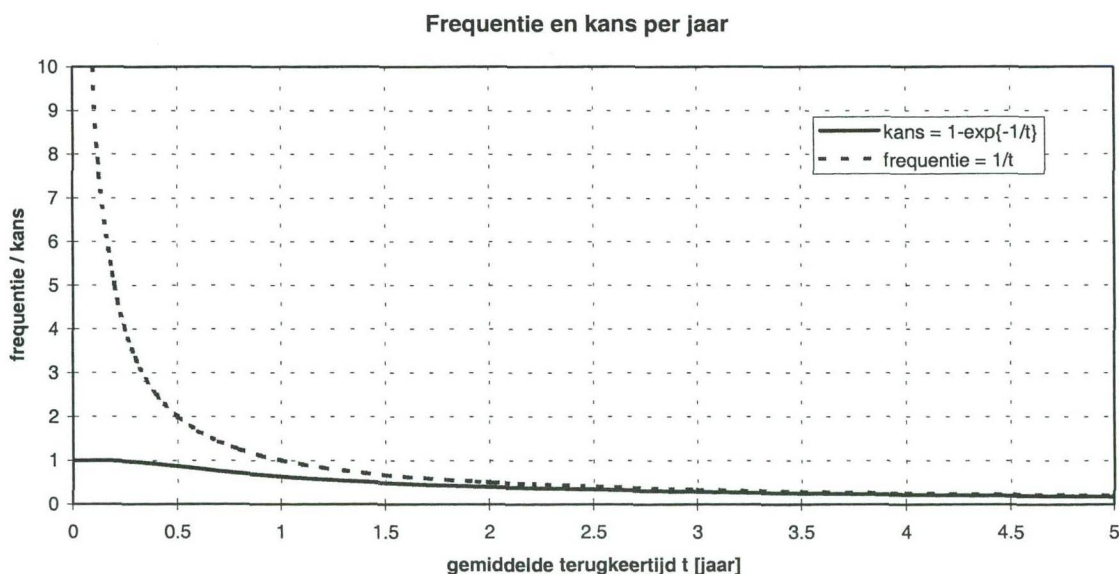
waarbij de overschrijdingskans is gedefinieerd als de kans dat de afvoer in een jaar 1 of meerdere malen een gegeven waarde overschrijdt. De overschrijdingskans wordt uitgedrukt in kans per jaar. Analoog is het verwachte aantal gebeurtenissen per jaar dan te schrijven als

$$\text{overschrijdingsfrequentie} = \frac{1}{t}, \quad (\text{A.4})$$

waarbij de overschrijdingsfrequentie is gedefinieerd als het verwachte aantal gebeurtenissen per jaar waarin de afvoer een gegeven waarde overschrijdt. De overschrijdingsfrequentie wordt uitgedrukt in aantal malen per jaar en is op basis van de vergelijkingen (A.3-4) als volgt te herschrijven als functie van de overschrijdingskans:

$$\text{overschrijdingsfrequentie} = -\ln(1 - \text{overschrijdingskans}). \quad (\text{A.5})$$

Een voorbeeld van de relatie tussen (overschrijdings)kans enerzijds en (overschrijdings)frequentie anderzijds is te vinden in Figuur 18 voor gemiddelde terugkeertijden tot aan 5 jaar. Uit deze figuur blijkt ook dat frequentie en kans voornamelijk van elkaar verschillen bij gebeurtenissen die vaker optreden dan eens per jaar: de frequentie is dan groter dan 1, terwijl de kans per definitie altijd kleiner dan of gelijk is aan 1. Bij een gemiddelde terugkeertijd van 5 jaar of meer is de frequentie ongeveer gelijk aan de kans.



Figuur 18: Frequentie en kans als functie van de gemiddelde terugkeertijd.

Tot slot dient er nog een belangrijke opmerking te worden gemaakt. Bij het modelleren van de gebeurtenissen volgens een Poisson-proces wordt de duur van een gebeurtenis niet meegenomen. Omdat de duur bij laag-frequente gebeurtenissen (zoals het optreden van extreme afvoeren) vaak veel kleiner is dan de gemiddelde terugkeertijd is deze aanname in dit geval zeker gerechtvaardigd. De in deze bijlage gepresenteerde relatie tussen frequentie en kans kan alleen worden toegepast indien de duur kleiner is dan de gemiddelde terugkeertijd!

Bijlage B: Kansdichtheidsfuncties

In deze bijlage staan de kansdichtheidsfuncties die zijn gebruikt voor de Bayesiaanse analyse van de jaarmaxima van de afvoeren voor de Rijn en de Maas. In de definities van deze kansdichtheidsfuncties worden de volgende bijzondere functies gebruikt:

- gammafunctie: $\Gamma(a) = \int_{t=0}^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ voor $a > 0$;
- indicatorfunctie: $I_A(x) = 1$ als $x \in A$ en $I_A(x) = 0$ als $x \notin A$ voor iedere verzameling A ;
- functie $[x]_+ = \max\{x, 0\}$ voor iedere x .

Kansverdeling	Kansdichtheidsfunctie
Exponentieel	$\frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x-a}{\theta}\right\} I_{(a,\infty)}(x), \theta > 0$
Rayleigh	$\frac{2(x-a)}{\theta} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{\theta}\right\} I_{(a,\infty)}(x), \theta > 0$
Normaal	$\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{r}{2}(x-m)^2\right\}, r > 0$
Lognormaal	$\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-a} \exp\left\{-\frac{r}{2}(\log(x-a)-m)^2\right\} I_{(a,\infty)}(x), r > 0$
Gamma	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} (x-c)^{a-1} \exp\{-b(x-c)\} I_{(c,\infty)}(x), a, b > 0$
Weibull	$\frac{a}{b} \left[\frac{x-c}{b}\right]^{a-1} \exp\left\{-\left[\frac{x-c}{b}\right]^a\right\} I_{(c,\infty)}(x), a, b > 0$
Gumbel	$\frac{1}{b} \exp\left\{-\frac{x-a}{b}\right\} \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{x-a}{b}\right\}\right\}, b > 0$
Gegeneraliseerde gamma	$\frac{c}{b\Gamma(a)} \left[\frac{x-d}{b}\right]^{ca-1} \exp\left\{-\left[\frac{x-d}{b}\right]^c\right\} I_{(d,\infty)}(x), a, b, c > 0$
Gegeneraliseerde extreme waarden	$\begin{cases} \frac{1}{b} \left[1 - \frac{c(x-a)}{b}\right]_+^{\frac{1}{c}-1} \exp\left\{-\left[1 - \frac{c(x-a)}{b}\right]_+^{\frac{1}{c}}\right\}, & c \neq 0, b > 0, \\ \frac{1}{b} \exp\left\{-\frac{x-a}{b}\right\} \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{x-a}{b}\right\}\right\}, & c = 0, b > 0, \end{cases}$

Tabel 7: Kansdichtheidsfuncties gebruikt in Bayesiaanse analyse.

Bijlage C: Onzekerheid in werklijn conform PC-Ring

Beschouw een deel van de werklijn die de relatie legt tussen een afvoer Q enerzijds en een gemiddelde terugkeertijd t anderzijds:

$$Q = A + B \ln(t) . \quad (C.1)$$

Zoals te doen gebruikelijk in de kansrekening en statistiek stelt Q een stochastische grootheid voor met q een realisatie hiervan. In vergelijking (C.1) zijn de werklijnparameter A en B onafhankelijk en normaal verdeeld. De werklijnparameter A heeft verwachting μ_A en standaarddeviatie σ_A ; de werklijnparameter B heeft verwachting μ_B en standaarddeviatie σ_B . De respectieve variatiecoëfficiënten zijn

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\mu_A}, \quad CV_B = \frac{\sigma_B}{\mu_B} .$$

De kansverdeling van de afvoer Q met een terugkeertijd van t jaar is nu als volgt te verkrijgen. Zij U een stochastische grootheid met uniforme kansverdeling op het interval $[0,1]$, dan geldt voor de werklijnparameter A dat

$$A = \mu_A + \sigma_A \Phi^{-1}(U)$$

met Φ de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling met verwachting 0 en standaarddeviatie 1. Zij V eveneens een stochastische grootheid met uniforme kansverdeling op het interval $[0,1]$, dan geldt voor de werklijnparameter B dat

$$B = \mu_B + \sigma_B \Phi^{-1}(V) .$$

De stochastische afvoer Q is hiermee te schrijven als

$$Q = [\mu_A + \sigma_A \Phi^{-1}(U)] + [\mu_B + \sigma_B \Phi^{-1}(V)] \ln(t) = [1 + CV_A \Phi^{-1}(U)] \mu_A + [1 + CV_B \Phi^{-1}(V)] \mu_B \ln(t)$$

met U onafhankelijk van V . In PC-Ring is deze vergelijking vereenvoudigd tot

$$Q = [1 + CV_A \Phi^{-1}(U)] \mu_A + [1 + CV_B \Phi^{-1}(V)] \mu_B \ln(t) = X \mu_A + Y \mu_B \ln(t)$$

met X en Y onafhankelijk, X normaal verdeeld met verwachting 1 en standaarddeviatie CV_A en Y normaal verdeeld met verwachting 1 en standaarddeviatie CV_B .

Om te bewerkstelligen dat de drie A -parameters behorende bij de drie delen van de werklijn volledig afhankelijk zijn moet voor elk werklijndeel steeds dezelfde stochastische grootheid U worden gebruikt. Bij dezelfde stochastische grootheid V zijn ook de drie B -parameters volledig afhankelijk.



HKV LIJN IN WATER
Postbus 2120
8203 AC Lelystad

Telefoon: 0320 294242
Telefax: 0320 253901
e-mail: info@hkv.nl

Bezoekadres:
Botter 11 nr. 29
Lelystad